Lösungen - Satz des Pythagoras

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $c_1 = \sqrt{9+16} = 5$; $c_2 = \sqrt{25+144} = 13$; $c_3 = \sqrt{64+225} = 17$; $c_4 = \sqrt{36+64} = 10$ (in cm).
b) Alle Hypotenusen sind ganze Zahlen: Es sind pythagoreische Tripel $(3|4|5)$, $(5|12|13)$, $(8|15|17)$ und $(6|8|10)$.
In jedem Fall sind die beiden gegebenen Seiten Katheten, deshalb addiert man ihre Quadrate und zieht die Wurzel. Das Tripel $(6|8|10)$ ist das Doppelte von $(3|4|5)$; jedes Vielfache eines pythagoreischen Tripels ist wieder eines.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $c = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$ cm.
b) $c = \sqrt{2{,}25+4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m.
c) $c = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \approx 6{,}40$ cm.
d) $c = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ cm.
Die Hypotenuse ist immer die längste Seite, das Ergebnis muss also größer als jede Kathete sein. Bei b) rechnet man mit Dezimalzahlen genauso wie mit ganzen Zahlen. Bei d) ist das Dreieck gleichschenklig, die Hypotenuse ist $10\sqrt{2}$ cm.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $a = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ cm.
b) $a = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ cm.
c) $a = \sqrt{49-16} = \sqrt{33} \approx 5{,}74$ cm.
d) $b = \sqrt{6{,}25-2{,}25} = \sqrt{4} = 2$ m.
Ist eine Kathete gesucht, wird das Quadrat der bekannten Kathete vom Quadrat der Hypotenuse abgezogen. Kontrolle zu a): $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$. Die Kathete ist immer kürzer als die Hypotenuse.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $36 + 64 = 100 = 10^2$: rechtwinklig.
b) $25 + 36 = 61 \neq 64$: nicht rechtwinklig.
c) $400 + 441 = 841 = 29^2$: rechtwinklig.
d) $49 + 81 = 130 \neq 144$: nicht rechtwinklig.
Nach der Umkehrung des Satzes ist ein Dreieck genau dann rechtwinklig, wenn die Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten gleich dem Quadrat der längsten ist.

Ist die Summe kleiner, ist der größte Winkel stumpf, ist sie größer, ist er spitz.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Fall 1: $36 + 64 = 100\,\text{cm}^2$. Fall 2: $169 - 144 = 25\,\text{cm}^2$.
b) $a = \sqrt{36} = 6$ cm, $b = \sqrt{64} = 8$ cm, $c = \sqrt{100} = 10$ cm.
c) $a = \sqrt{144} = 12$ cm, $b = \sqrt{25} = 5$ cm, $c = \sqrt{169} = 13$ cm.
Die Flächen der Quadrate sind genau die Quadrate der Seitenlängen. Deshalb erhält man die Seiten, indem man aus den Flächen die Wurzel zieht. Der Satz des Pythagoras ist also ursprünglich eine Aussage über Flächen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $d = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ cm.
b) $d = \sqrt{64 + 36} = 10$ cm.
c) $d = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98} \approx 9{,}90$ cm.
d) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.
Jede Diagonale teilt ein Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die Diagonale die Hypotenuse ist. Für das Quadrat ergibt sich die Merkformel $d = a\sqrt{2} \approx 1{,}41 \cdot a$. Kontrolle zu c): $7 \cdot 1{,}41 \approx 9{,}9$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $h = \sqrt{25 - 1{,}96} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ m.
b) $\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ m.
c) $\sqrt{25 - 20{,}25} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$ m.
d) Bei zu geringem Abstand ist die Leiter sehr steil und kann nach hinten kippen. Sicher ist ein Winkel von etwa 70° zum Boden.
Wand, Boden und Leiter bilden ein rechtwinkliges Dreieck; die Leiter ist die Hypotenuse. Antwort: Die Leiter reicht 4,8 m hoch; für das Fenster in 4,5 m Höhe muss der Fuß etwa 2,18 m von der Wand stehen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $d = \sqrt{122^2 + 68{,}6^2} = \sqrt{19\,589{,}96} \approx 140{,}0$ cm.
b) $\frac{140}{2{,}54} \approx 55{,}1$ Zoll, also 55 Zoll.
c) $d = 32 \cdot 2{,}54 = 81{,}28$ cm; $(16k)^2 + (9k)^2 = 81{,}28^2$, $337k^2 = 6606$, $k \approx 4{,}43$; Breite ≈ 71 cm, Höhe ≈ 40 cm.
d) Nein, 122 cm sind breiter als das Regal mit 110 cm.
Breite, Höhe und Diagonale bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Antwort: Der Fernseher hat eine Diagonale von 140 cm, also 55 Zoll, und passt nicht auf das 110 cm breite Regal.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.
b) $\sqrt{36+64} = 10$.
c) $\sqrt{25+144} = 13$.
d) $\sqrt{25+36} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$.
Die Differenzen der Koordinaten sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, der Abstand der Punkte ist die Hypotenuse. Das Vorzeichen der Differenzen spielt keine Rolle, weil sie quadriert werden.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} \approx 5{,}20$ cm; $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5{,}20 \approx 15{,}59\,\text{cm}^2$.
b) $h = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm; $A \approx 43{,}30\,\text{cm}^2$.
c) $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$, also $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ und $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
d) $h = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$ m; $A \approx 3{,}90\,\text{m}^2$; Kosten \approx 54{,}60\,€.
Die Höhe halbiert die Grundseite, deshalb ist eine Kathete $\frac{a}{2}$. Antwort: Bei 6 cm Seitenlänge ist das Dreieck etwa 5,20 cm hoch; der Stoff für die Pergola kostet rund 54,60 €.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $d = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{15\,649} \approx 125{,}1$ m.
b) $105 + 68 - 125{,}1 = 47{,}9$ m.
c) $\frac{125{,}1}{6} \approx 20{,}8$ s.
d) $\frac{68}{2} = 34$ Bahnen, je 105 m lang: insgesamt $34 \cdot 105 = 3570$ m.
Antwort: Die Diagonale ist rund 125 m lang; wer sie läuft, spart fast 48 m und braucht bei 6 m/s etwa 21 Sekunden. Der direkte Weg ist immer kürzer als der Umweg über zwei Seiten.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\sqrt{1{,}2^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{13{,}69} \approx 3{,}70$ m.
b) $3{,}70 \cdot 2 = 7{,}40\,\text{m}^2$.
c) 7{,}40\cdot24=177{,}60\,€.
d) $\frac{1{,}2}{3{,}5} \approx 34{,}3\,\%$.
Höhenunterschied und waagerechte Strecke sind die Katheten, die Rampenfläche ist die Hypotenuse. Antwort: Die Rampe ist 3,70 m lang, das Holz kostet 177,60 €, die Steigung beträgt gut 34 %.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\sqrt{64+36} = 10$ m.
b) $10 + 0{,}25 + 0{,}25 = 10{,}5$ m.
c) $\sqrt{64+16} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ m.
d) Ein weiter entfernter Punkt gibt dem Mast mehr Halt (flacherer Winkel), braucht aber ein längeres Seil.
Mast, Deck und Seil bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Seil als Hypotenuse.
Antwort: Bei 6 m Abstand braucht man 10,5 m Seil, bei 4 m Abstand nur knapp 9 m plus die Befestigung.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $d = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$ m.
b) $15{,}02 - 15 = 0{,}02$ m $= 2$ cm.
c) Die Abweichung beträgt 2 cm, das ist gerade noch erlaubt.
d) $d = \sqrt{36+64} = 10$ m. Das Dreieck ist doppelt so groß wie 3-4-5.
Die Schnurmethode nutzt die Umkehrung des Satzes: Stimmt die gemessene Diagonale mit der berechneten überein, ist die Ecke rechtwinklig. Antwort: Das Fundament ist gerade noch innerhalb der Toleranz.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $AB = \sqrt{16+9} = 5$; $AC = \sqrt{9+16} = 5$; $BC = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$.
b) $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$: rechtwinklig bei A (gleichschenklig-rechtwinklig).
c) $u = 5 + 5 + 7{,}07 = 17{,}07$; $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$.
d) Nein: Eine Verschiebung ist eine Kongruenzabbildung, die Längen bleiben gleich.
Die Seitenlängen berechnet man mit der Abstandsformel. Da zwei Seiten gleich lang sind und der Winkel bei A ein rechter ist, ist das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig.
Antwort: Umfang etwa 17,07, Fläche 12,5 Flächeneinheiten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\sqrt{81+49} = \sqrt{130} \approx 11{,}40$ m.
b) $\sqrt{130+9} = \sqrt{139} \approx 11{,}79$ m.
c) Nein: $11{,}79$ m m. Die Stange ist 21 cm zu lang.
d) $\sqrt{3600+1600+900} = \sqrt{6100} \approx 78{,}1$ cm.
Für die Raumdiagonale wendet man den Satz zweimal an: erst für die Bodendiagonale, dann im senkrechten Dreieck aus Bodendiagonale und Raumhöhe. Antwort: Die Stange passt nicht hinein, sie ist 21 cm zu lang.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $s = \sqrt{5^2 + 3{,}6^2} = \sqrt{37{,}96} \approx 6{,}16$ m.
b) $2 \cdot 6{,}16 \cdot 12 \approx 147{,}8\,\mathrm{m}^2$.
c) *147{,}8\cdot12\approx1774\,€*.
d) $G = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3{,}6 = 18\,\mathrm{m}^2$; $V = 18 \cdot 12 = 216\,\mathrm{m}^3$.
e) $s = \sqrt{25 + 25} = 7{,}07$ m; Fläche $2 \cdot 7{,}07 \cdot 12 \approx 169{,}7\,\mathrm{m}^2$, also deutlich größer.
Die Dachschräge ist die Hypotenuse aus halber Giebelbreite und Dachhöhe. Antwort: Die Dachfläche beträgt rund 148 m², die Ziegel kosten etwa 1774 €; ein steileres Dach hätte deutlich mehr Fläche.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\sqrt{800^2 + 300^2} = \sqrt{730\,000} \approx 854{,}4$ m.
b) $\frac{854{,}4}{5} \approx 170{,}9$ s $\approx 2{,}8$ min.
c) $\frac{300}{800} = 37{,}5\,\%$.
d) $\frac{854{,}4}{3} \approx 284{,}8$ s $\approx 4{,}7$ min; Unterschied $\approx 1{,}9$ min.
e) *854{,}4\cdot48\approx41\,011\,€*.
Waagerechter Abstand und Höhenunterschied sind die Katheten, das Tragseil ist die Hypotenuse. Antwort: Das Seil ist rund 854 m lang, die Fahrt dauert knapp 3 Minuten und bei Sturm etwa 2 Minuten länger.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $(m = 2, n = 1)$: $3, 4, 5$; $(3, 2)$: $5, 12, 13$; $(4, 3)$: $7, 24, 25$; $(5, 2)$: $21, 20, 29$.
b) $9 + 16 = 25$; $25 + 144 = 169$; $49 + 576 = 625$; $441 + 400 = 841 = 29^2$.
c) $m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$ (zweite und erste binomische Formel).
d) Alle Paare $m > n$ mit $m \leq 6$ ergeben ein Tripel: 15 Paare, aber einige sind Vielfache (zum Beispiel $m = 4, n = 2$ ergibt $12, 16, 20$).
Die Formel liefert für jedes Zahlenpaar $m > n$ ein Tripel, weil die Gleichung aus c) für alle Zahlen gilt. Antwort: Mit $m \leq 6$ erhält man 15 Tripel, darunter einige Vielfache bekannter Tripel.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $(3 + 4)^2 = 49$.
b) $4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 24$.
c) $49 - 24 = 25 = 5^2 = c^2$. Das passt.
d) $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$; auf beiden Seiten $2ab$ abziehen: $a^2 + b^2 = c^2$.
Antwort: Die Flächenzerlegung zeigt, dass das innere Quadrat genau c^2 groß ist. Damit ist der Satz des Pythagoras für alle rechtwinkligen Dreiecke bewiesen, nicht nur für Zahlenbeispiele.