Lernzettel - Prozent- und Zinseszinsrechnung

Klasse: Klasse 8

Prozente und Zinsen begegnen dir im Alltag bei Preisen, Rabatten und Sparkonten. Mit dem Wachstumsfaktor rechnest du schnell und sicher.

Einstieg: Lohnt sich das Sparen?

Nele bekommt zum Geburtstag *2\,000\,€* geschenkt und legt sie für fünf Jahre auf ein Konto mit $4\,\%$ Zinsen. Nach dem ersten Jahr sind es *2\,080\,€*, nach dem zweiten Jahr *2\,163{,}20\,€*, nach fünf Jahren *2\,433{,}31\,€*. Obwohl der Zinssatz immer $4\,\%$ beträgt, wächst der Zinsbetrag von Jahr zu Jahr: im ersten Jahr *80\,€*, im fünften schon fast *94\,€*. Das liegt am Zinseszins, denn die Zinsen werden im nächsten Jahr mitverzinst. Mit dem Wachstumsfaktor $q = 1{,}04$ rechnest du schnell: $2000 \cdot 1{,}04^5$. In diesem Kapitel lernst du, Prozente sicher zu verwenden, mehrfache Änderungen richtig zu verknüpfen und Zinseszins in allen Varianten zu berechnen, auch rückwärts.

Prozentrechnung wiederholen

Definition: Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz

Der **Grundwert** G ist das Ganze (100 %), der **Prozentwert** W der Anteil und der **Prozentsatz** $p\,\%$ gibt an, wie groß der Anteil ist.

Regel: Prozentformeln

$$W = G \cdot \frac{p}{100}, \qquad G = \frac{W}{p/100}, \qquad p\,\% = \frac{W}{G}$$

Beispiel 1: Drei Größen

Berechne 15 % von 240 €, den Grundwert zu 18 € (12 %) und den Prozentsatz von 45 aus 180.

$240 \cdot 0{,}15 = 36$ €.

$G = 18 : 0{,}12 = 150$ €.

$\frac{45}{180} = 0{,}25 = 25\,\%$.

Der Wachstumsfaktor

Definition: Wachstumsfaktor

Der **Wachstumsfaktor** q gibt an, mit welcher Zahl du den Wert multiplizierst: bei Zunahme um $p\,\%$ ist $q = 1 + \frac{p}{100}$, bei Abnahme um $p\,\%$ ist $q = 1 - \frac{p}{100}$. Beispiele: $+8\,\%$ ergibt $q = 1{,}08$, $-15\,\%$ ergibt $q = 0{,}85$.

Regel: Neuer Wert und Rückrechnung

$G_{\text{neu}} = G \cdot q$. Zurückrechnen: $G = G_{\text{neu}} : q$.

Beispiel 2: Mehrwertsteuer

Ein Preis von 80 € kommt mit 19 % Mehrwertsteuer. Wie hoch ist der Bruttopreis, wie hoch war der Nettopreis bei brutto 59,50 €?

$80 \cdot 1{,}19 = 95{,}20$ €.

$59{,}50 : 1{,}19 = 50$ €.

Mehrfache prozentuale Änderung

Regel: Faktoren multiplizieren

Ändert sich ein Wert mehrmals um Prozente, **multiplizierst du die Faktoren**. Die Prozentsätze darfst du nicht addieren.

Beispiel 3: Hoch und runter

Ein Preis steigt um 20 % und sinkt dann um 20 %. Zwei Rabatte von 20 % und 10 % kommen nacheinander. Was ergibt sich?

$1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$. Der Preis ist insgesamt um 4 % gesunken, nicht gleich geblieben.

$0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$, also insgesamt 28 % Rabatt.

Zinsrechnung und Zinseszins

Definition: Zinseszins

Zinsen sind die Gebühr für geliehenes oder angelegtes Geld. Das **Kapital** K_0 wächst mit dem **Zinssatz** $p\,\%$. Lässt du die Zinsen auf dem Konto, werden sie im nächsten Jahr mitverzinst. Das heißt **Zinseszins**.

Satz: Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot q^n \text{ mit } q = 1 + \frac{p}{100}$$

So gehst du vor: Zinseszins-Aufgabe

1. Lies die Aufgabe und markiere, was gegeben und was gesucht ist.
2. Bestimme den Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$.
3. Setze in $K_n = K_0 \cdot q^n$ ein und stelle um (Wurzel für q, Division für K_0).
4. Runde erst am Ende auf Cent.
5. Prüfe: Ein Guthaben mit Zinsen muss größer sein als das Anfangskapital. Schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 4: Endkapital

1000 € werden 2 Jahre lang mit 3 % verzinst.

$K_2 = 1000 \cdot 1{,}03^2 = 1060{,}90$ €.

Zum Vergleich: Ohne Zinseszins wären es nur $1000 + 2 \cdot 30 = 1060$ €.

Beispiel 5: Anfangskapital

Nach 3 Jahren bei 5 % sind es 2315,25 €. Wie groß war das Anfangskapital?

$K_3 = K_0 \cdot 1{,}05^3$, also $K_0 = \dfrac{2315{,}25}{1{,}157625} = 2000$ €.

Beispiel 6: Zinssatz

Aus 1000 € werden in 2 Jahren 1210 €. Wie hoch ist der Zinssatz?

$q^2 = \frac{1210}{1000} = 1{,}21$, also $q = 1{,}1$ und $p = 10\,\%$.

Beispiel 7: Laufzeit

Wann hat sich ein Kapital bei 5 % Zins verdoppelt?

Probieren: $1{,}05^{14} \approx 1{,}98$, aber $1{,}05^{15} \approx 2{,}08$. Nach 15 Jahren hat sich das Kapital mehr als verdoppelt.

Beispiel 8: Sparplan vergleichen

Nele legt 2000 € für 5 Jahre zu 4 % an. Was bringt der Zinseszins?

Einfache Verzinsung: $5 \cdot 80 = 400$ €, also 2400 €.

Mit Zinseszins: $2000 \cdot 1{,}04^5 \approx 2433{,}31$ €. Der Zinseszins bringt 33,31 € mehr.

Abnahme im Alltag

Beispiel 9: Wertverlust

Ein Auto für 20 000 € verliert jährlich 15 % an Wert. Wie viel ist es nach 3 Jahren wert?

$q = 0{,}85$. $20\,000 \cdot 0{,}85^3 \approx 12\,282{,}50$ €. Bei Abnahme ist q, bei Wachstum $q > 1$.

Prozentpunkte oder Prozent?

In Nachrichten verwechseln viele diese Begriffe. Steigt ein Zinssatz von $2\,\%$ auf $3\,\%$, dann ist das eine Erhöhung um einen Prozentpunkt. Relativ gesehen ist es aber eine Steigerung um $50\,\%$, denn 3 ist die Hälfte mehr als 2. Prozentpunkte beschreiben die Differenz zweier Prozentsätze, Prozent beschreiben die relative Änderung eines Wertes. Das ist wichtig, wenn du Umfragen, Wahlergebnisse oder Zinsangebote beurteilst.

Beispiel 10: Wahlergebnis

Eine Partei hatte bei der letzten Wahl $8\,\%$ der Stimmen, jetzt $10\,\%$. Wie lauten die Änderungen in Prozentpunkten und in Prozent?

Differenz: $10 - 8 = 2$ Prozentpunkte. Relativ: $\frac{2}{8} = 0{,}25 = 25\,\%$ mehr Stimmanteil. Beide Angaben sind richtig, aber sie sagen etwas anderes.

Lineares oder exponentielles Wachstum?

Bei einfacher Verzinsung kommt jedes Jahr derselbe Betrag dazu, das ergibt lineares Wachstum mit einer Geraden. Beim Zinseszins wird der Betrag jedes Jahr größer, das ergibt exponentielles Wachstum. Am Anfang sehen beide ähnlich aus, nach vielen Jahren ist der Unterschied riesig: Bei $5\,\%$ wachsen *1\,000\,€* in 40 Jahren mit einfacher Verzinsung auf *3\,000\,€*, mit Zinseszins aber auf etwa *7\,040\,€*.

Beispiel 11: Vergleich nach 20 Jahren

Vergleiche *5\,000\,€* bei $3\,\%$ nach 20 Jahren mit und ohne Zinseszins.

Einfach: *5000+20\cdot150=8\,000\,€*. Zinseszins: *5000\cdot1{,}03^{20}\approx9\,030{,}56\,€*. Der Zinseszins bringt *1\,030{,}56\,€* mehr.

Abnahme und Zerfall

Auch Abnahmen laufen exponentiell: Ein Wertverlust von $10\,\%$ pro Jahr bedeutet den Faktor $0{,}9$ in jedem Jahr. Das gilt für Autos, Handys, Medikamente im Blut oder die Lautstärke eines Echos. Der Wert wird nie ganz null, weil sich der Prozentsatz immer auf den Rest bezieht. Verdopplungs- und Halbierungszeiten sind typische Fragen.

Beispiel 12: Halbierung

Ein Handy verliert jedes Jahr $25\,\%$ seines Wertes. Wann ist es weniger als die Hälfte wert?

$q = 0{,}75$. $0{,}75^2 = 0{,}5625$, $0{,}75^3 = 0{,}4219$. Nach 3 Jahren ist der Wert unter $50\,\%$ gesunken.

Beispiel 13: Mit Sparrate

Familie Yilmaz zahlt jeden Jahresanfang *1\,000\,€* ein, bei $2\,\%$ Zinsen. Wie viel ist es nach 3 Jahren?

Die erste Einzahlung wird 3 Jahre verzinst: $1000 \cdot 1{,}02^3 = 1061{,}21$. Die zweite 2 Jahre: $1040{,}40$. Die dritte 1 Jahr: $1020{,}00$. Zusammen *3\,121{,}61\,€*. Die Einzahlungen allein sind *3\,000\,€*, die Zinsen *121{,}61\,€*.

Beispiel 14: Sparziel erreichen

Mia möchte in 6 Jahren *3\,000\,€* für einen Führerschein haben. Der Zinssatz beträgt $2\,\%$. Wie viel muss sie heute anlegen?

Gesucht ist K_0 mit $K_6 = 3000$. Es gilt *K_0=\frac{3000}{1{,}02^6}=\frac{3000}{1{,}12616}\approx2\,663{,}91\,€*. Sie muss heute etwa *2\,664\,€* anlegen; die Zinsen betragen dann rund *336\,€*.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: Bei $3\,\%$ ist $q = 1{,}03$, nicht $1{,}3$. Zweitens: Beim Zurückrechnen teilst du durch q, du ziehst nicht einfach $p\,\%$ ab: $\frac{59{,}50}{1{,}19} = 50$, aber $59{,}50 \cdot 0{,}81 = 48{,}20$ wäre falsch. Drittens: Runde nicht zwischendurch, sonst entstehen Abweichungen von einigen Cent.

Wusstest du?

Albert Einstein soll den Zinseszins das „achte Weltwunder“ genannt haben, ob er es wirklich sagte, ist nicht sicher. Sicher ist: Schon der kleine Unterschied von einem Prozentpunkt macht über Jahrzehnte viel aus. Die Faustregel „72 geteilt durch den Zinssatz“ gibt dir in Sekunden die Zeit bis zur Verdopplung.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Grundwert G, Prozentwert W, Prozentsatz p: $W = G \cdot \frac{p}{100}$, $G = \frac{W}{p/100}$, $p\,\% = \frac{W}{G}$.
- Wachstumsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$ bei Zunahme, $q = 1 - \frac{p}{100}$ bei Abnahme; neuer Wert $= G \cdot q$.
- Zurückrechnen: durch q teilen, nicht $p\,\%$ abziehen.
- Mehrere Änderungen: Faktoren multiplizieren; $+20\,\%$ und $-20\,\%$ ergeben $0{,}96$, also $-4\,\%$.
- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$.
- Zinssatz aus $q = \sqrt[n]{K_n / K_0}$, Laufzeit durch Probieren oder mit der Regel $\frac{72}{p}$ für die Verdopplung.
- Prozentpunkte (Differenz von Prozentsätzen) sind etwas anderes als Prozent (relative Änderung).
- Runde erst am Ende; vorher mit allen Stellen rechnen.

Achtung

Prozentsätze mehrerer Schritte nicht addieren, sondern Faktoren multiplizieren. Bei 3 % ist $q = 1{,}03$, nicht $1{,}3$. Zinsen nicht jedes Jahr nur auf das Anfangskapital rechnen. Beim Rückrechnen durch q teilen, nicht $p\,\%$ abziehen. Zwischenergebnisse nicht zu früh runden.

Vertiefung: Mit Wachstumsfaktoren rechnen

Einstieg: Der Zinseszinseffekt

Zwei Freundinnen legen je 1000 € an, beide zu 5 % Zinsen. Anna lässt sich die Zinsen jedes Jahr auszahlen, Bea lässt sie auf dem Konto. Nach einem Jahr haben beide 50 € Zinsen. Im zweiten Jahr bekommt Anna wieder 50 €, Bea aber 5 % von 1050 €, also 52,50 €. Der Unterschied ist zuerst winzig, wächst aber von Jahr zu Jahr. Nach 30 Jahren hat Anna insgesamt 1500 € Zinsen erhalten, Bea besitzt dagegen *1000\cdot1{,}05^{30}\approx4322\,€*, also gut 3322 € Zinsen. Diesen Effekt nennt man Zinseszins: Auch die Zinsen bringen wieder Zinsen.

So gehst du vor: Aufgaben zum Zinseszins

1. Bestimme den Wachstumsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$ bei Zunahme, $q = 1 - \frac{p}{100}$ bei Abnahme.
2. Notiere, welche Größe gesucht ist: Endwert K_n, Anfangswert K_0, Zinssatz p oder Laufzeit n.
3. Endwert: $K_n = K_0 \cdot q^n$. Anfangswert: $K_0 = K_n : q^n$.
4. Zinssatz: $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$, dann $p = (q - 1) \cdot 100$.
5. Laufzeit: Probiere verschiedene n mit dem Taschenrechner aus, bis der Zielwert erreicht ist.
6. Runde Geldbeträge erst am Ende auf Cent.

Achtung: Prozentsätze nicht addieren

Wer bei mehreren Jahren die Prozentsätze addiert, rechnet mit einfacher Verzinsung und unterschätzt das Ergebnis. Bei Rabatten passiert der umgekehrte Fehler: 20 % und dann 10 % Rabatt sind nicht 30 %, sondern nur 28 %, denn $0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. Merke: Aufeinanderfolgende prozentuale Änderungen werden immer über ihre Faktoren multipliziert.

Beispiel: Zinssatz aus Anfangs- und Endkapital

Aus 4000 € werden in 2 Jahren 4243,60 €. Wie hoch ist der Zinssatz?

Es gilt $q^2 = 4243{,}60 : 4000 = 1{,}0609$. Die Quadratwurzel ergibt $q = 1{,}03$, also beträgt

der Zinssatz 3 %. Probe: $4000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 4243{,}60$. Bei längeren Laufzeiten zieht man entsprechend die dritte, vierte oder n-te Wurzel.

Hinweis: Effektiver Zinssatz

Banken werben oft mit Zinsen, die monatlich oder vierteljährlich gutgeschrieben werden. Durch den Zinseszins ist der tatsächliche Jahreszins dann etwas höher als der genannte Zinssatz.

Ottos Tipp

Überlege vor dem Rechnen: Soll das Ergebnis größer oder kleiner werden? Bei einer Zunahme muss q größer als 1 sein. So fällt dir ein Tippfehler im Taschenrechner sofort auf. Bei Zinseszins hilft die Probe mit einem Jahr: $K_1 = K_0 \cdot q$.