Lösungen - Prozent- und Zinseszinsrechnung

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $240 \cdot 0{,}15 = 36$ €; $18 : 0{,}12 = 150$ €; $\frac{45}{180} = 25\,\%$; $14 : 0{,}08 = 175$ m.
b) Proben: $150 \cdot 0{,}12 = 18$; $180 \cdot 0{,}25 = 45$; $175 \cdot 0{,}08 = 14$; $240 \cdot 0{,}15 = 36$.
Bei jeder Zeile prüft man zuerst, welche Größe fehlt, und wählt dann die passende Formel. Der Prozentsatz wird für die Rechnung als Dezimalzahl geschrieben, etwa $15\,\% = 0{,}15$. Die Probe setzt die gefundene Größe wieder in die Grundformel ein.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $q = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$.
b) $q = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
c) $q = 1{,}025$.
d) Abnahme um $40\,\%$, denn $1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
e) Zunahme um $35\,\%$.
Der Wachstumsfaktor gibt an, mit welcher Zahl der alte Wert multipliziert wird. Bei einer Zunahme ist er größer als 1, bei einer Abnahme kleiner als 1. Umgekehrt liest man die Änderung als Abstand des Faktors von 1 ab.

Lösung zu Aufgabe 3

a) *80\cdot1{,}19=95{,}20\,€*.
b) *120\cdot0{,}75=90\,€*.
c) *59{,}50:1{,}19=50{,}00\,€*.
d) *63:0{,}7=90\,€*.
Für den neuen Preis multipliziert man mit dem Faktor, für den alten Preis teilt man durch ihn. Bei c) darf man nicht 19 % vom Bruttopreis abziehen, weil sich die Steuer auf den Nettopreis bezieht. Probe zu d): $90 \cdot 0{,}7 = 63$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$: insgesamt $4\,\%$ weniger.
b) $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$: insgesamt $28\,\%$ weniger.
c) $1{,}1^3 = 1{,}331$: insgesamt $33{,}1\,\%$ mehr.
Die Faktoren mehrerer Änderungen werden multipliziert, nicht die Prozentsätze addiert. Bei a) liegt man trotz gleicher Prozentsätze am Ende unter dem Ausgangswert, weil sich die Senkung auf den höheren Wert bezieht.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $1000\cdot1{,}03^2=1060{,}90\,€$.
b) $2500\cdot1{,}02^5=2760{,}20\,€$.
c) $800\cdot1{,}015^{10}=928{,}43\,€$.
Beim Zinseszins wird das Kapital jedes Jahr mit dem Zinsfaktor $q=1+\frac{p}{100}$ multipliziert, nach n Jahren also mit q^n. Antwort: Die Endkapitale betragen 1060,90 €, 2760,20 € und 928,43 €. Kontrolle zu a): Im ersten Jahr gibt es 30 € Zinsen, im zweiten 30,90 €, weil die ersten Zinsen mitverzinst werden.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $K_0=\frac{2315{,}25}{1{,}05^3}=2000{,}00\,€$.
b) $K_0=\frac{5000}{1{,}03^4}=4442{,}44\,€$.
Zum Rückwärtsrechnen teilt man das Endkapital durch q^n. Probe zu a): $2000\cdot1{,}05^3=2315{,}25$. Antwort: Die Anfangskapitale waren 2000 € und rund 4442 €. Man nennt diese Rechnung auch Abzinsen: Sie beantwortet die Frage, wie viel Geld man heute anlegen muss, um in einigen Jahren einen bestimmten Betrag zu besitzen.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $q^2=1{,}21$, $q=1{,}10$, also $p=10\,\%$.
b) $q^2=1{,}0816$, $q=1{,}04$, also $p=4\,\%$.
c) $q^3=\frac{2249{,}73}{2000}\approx1{,}1249$, $q=1{,}040$, also $p=4\,\%$.
Teilt man das Endkapital durch das Anfangskapital, erhält man q^n. Daraus zieht man die n-te Wurzel. Antwort: In allen drei Fällen ergeben sich glatte Zinssätze von 10 %, 4 % und 4 %.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $1{,}04^{17}\approx1{,}948$, $1{,}04^{18}\approx2{,}026$: nach 18 Jahren.
b) $1{,}06^{11}\approx1{,}898$, $1{,}06^{12}\approx2{,}012$: nach 12 Jahren.
c) $1{,}02^{35}\approx2{,}000$: nach 35 Jahren. Die Regel gibt $\frac{72}{2}=36$: sehr gut.
Da man die Gleichung $q^n=2$ in Klasse 8 noch nicht mit Logarithmen lösen kann, probiert man systematisch aus. Die Faustregel „72 durch Zinssatz“ liefert eine gute Schätzung der Verdopplungszeit.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $24\cdot1{,}075=25{,}80\,€$.
b) $12\cdot24=288\,€$; $12\cdot25{,}80=309{,}60\,€$.
c) Genau $7{,}5\,\%$, denn alle Monate steigen um denselben Faktor.
d) $24\cdot1{,}075^2=27{,}73\,€$ pro Monat.
Antwort: Der neue Monatspreis beträgt 25,80 €, die Jahreskosten steigen von 288 € auf 309,60 €. Nach zwei Erhöhungen kostet der Vertrag 27,73 € im Monat, also mehr als

24 € plus zweimal 1,80 €.

Lösung zu Aufgabe 10

a) *120\cdot0{,}75=90\,€*.
b) *90\cdot0{,}9=81\,€*.
c) $\frac{81}{120} = 0{,}675$, also $32{,}5\,\%$ Rabatt.
d) Der zweite Rabatt bezieht sich auf den schon gesenkten Preis, nicht auf die *120\,€*. Faktoren werden multipliziert, nicht Prozentsätze addiert.
Antwort: Die Jacke kostet am Ende 81 €, der Gesamtrabatt beträgt 32,5 %. Der Gesamtfaktor $0{,}75 \cdot 0{,}9 = 0{,}675$ zeigt sofort, dass man 67,5 % des Ausgangspreises bezahlt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Brot $2{,}80 \cdot 1{,}07 = 3{,}00$; Roman $14 \cdot 1{,}07 = 14{,}98$; Heft-Set $5 \cdot 1{,}19 = 5{,}95$; Rucksack $40 \cdot 1{,}19 = 47{,}60$ (in Euro).
b) Brutto $2{,}996 + 14{,}98 + 5{,}95 + 47{,}60 = 71{,}53$; Netto $61{,}80$; MwSt *9{,}73\,€*.
c) $\frac{9{,}73}{61{,}80} \approx 15{,}7\,\%$.
d) *59{,}50:1{,}19=50{,}00\,€*.
Bruttopreis = Nettopreis mal $1{,}07$ bzw. $1{,}19$. Der durchschnittliche Steuersatz des Einkaufs liegt zwischen 7 % und 19 %, weil Waren mit beiden Sätzen dabei sind.
Antwort: Die gesamte Mehrwertsteuer beträgt rund 9,73 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $2080{,}00$; $2163{,}20$; $2249{,}73$; $2339{,}72$; $2433{,}31$ (in Euro). Probe: $2000 \cdot 1{,}04^5 = 2433{,}31$.
b) *2433{,}31-2000=433{,}31\,€*.
c) *5\cdot80=400\,€* Zinsen, also *2\,400\,€*.
d) *433{,}31-400=33{,}31\,€*.
Jedes Jahr wird das Kapital mit 1,04 multipliziert, und die Zinsen werden mitverzinst.
Antwort: Nach 5 Jahren hat Nele 2433,31 €; der Zinseszins bringt ihr 33,31 € mehr als die einfache Verzinsung.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $q = 0{,}85$. *20000\cdot0{,}85^3=12\,282{,}50\,€*; *20000\cdot0{,}85^5=8874{,}11\,€*.
b) $0{,}85^4 \approx 0{,}522$ (noch über $50\,\%$); $0{,}85^5 \approx 0{,}444$: nach 5 Jahren.
c) *20000-8874{,}11=11\,125{,}89\,€*.
d) $0{,}85^5 \approx 44{,}4\,\%$.
Ein Wertverlust von 15 % entspricht dem Faktor 0,85. Antwort: Nach 5 Jahren ist das Auto nur noch rund 8874 € wert, also etwa 44 % des Neupreises; erstmals unter der Hälfte liegt der Wert nach 5 Jahren.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $200 \cdot 1{,}1^3 = 266{,}2$; $200 \cdot 1{,}1^6 = 354{,}3$.
b) $1{,}1^9 \approx 2{,}358$ (zu wenig), $1{,}1^{10} \approx 2{,}594$: nach 10 Monaten.
c) Die $10\,\%$ beziehen sich auf den jeweils größeren Wert, die absolute Zunahme wächst.
d) Exponentiell: $200 \cdot 1{,}1^{12} \approx 628$; linear: $200 + 240 = 440$. Das exponentielle Wachstum ist viel größer.
Antwort: Nach 10 Monaten hat das Profil erstmals mehr als 500 Follower. Exponentielles Wachstum beginnt langsam, überholt lineares Wachstum aber immer, weil die absolute Zunahme ständig größer wird.

Lösung zu Aufgabe 15

a) A: $5150{,}00$; $5304{,}50$; $5463{,}64$. B: $5100{,}00$; $5278{,}50$; $5463{,}25$ (in Euro).
b) A ist besser um *5463{,}64-5463{,}25=0{,}39\,€*.
c) $\sqrt[3]{1{,}02 \cdot 1{,}035^2} = \sqrt[3]{1{,}09265} \approx 1{,}0300$.
d) Das sind etwa $2{,}998\,\%$, also praktisch $3\,\%$ wie bei Bank A.
e) Der Unterschied ist winzig (unter *0{,}40\,€*). Ob die Bank sicher ist, ob man vorzeitig an das Geld kommt und ob die Zinsen garantiert sind, ist wichtiger als der kleine Unterschied.
Antwort: Bank A ist um 39 Cent besser, der Unterschied ist also praktisch bedeutungslos. Der durchschnittliche Faktor von Bank B wird mit der dritten Wurzel berechnet, nicht mit dem Mittelwert der Zinssätze.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $6240{,}00$; $6489{,}60$; $6749{,}18$; $7019{,}15$ (in Euro). Probe: $6000 \cdot 1{,}04^4 = 7019{,}15$.
b) *7019{,}15-6000=1019{,}15\,€*.
c) *4\cdot240=960\,€*.
d) $1{,}04^7 \approx 1{,}316$, $1{,}04^8 \approx 1{,}369$: $8000 : 6000 = 1{,}333$, also nach 8 Jahren.
e) *7019{,}15:5=1403{,}83\,€*.
Bei einem Kredit wächst die Schuld genauso wie ein Sparguthaben. Antwort: Nach 4 Jahren schuldet Leonie 7019,15 €; der Zinseszins kostet sie 59,15 € mehr als einfache Zinsen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) *0{,}40\cdot1{,}025^5=0{,}45\,€*; 10 Jahre: *0{,}51\,€*; 20 Jahre: *0{,}66\,€*.
b) *100:1{,}025^5\approx88{,}39\,€*; 10 Jahre: *78{,}12\,€*; 20 Jahre: *61{,}03\,€*.
c) $1{,}025^{28} \approx 1{,}996$, $1{,}025^{29} \approx 2{,}046$: nach 29 Jahren (Regel $\frac{72}{2{,}5} \approx 29$).
d) Das Geld verliert jedes Jahr an Kaufkraft, auch wenn die Zahl auf dem Schein gleich bleibt. Nach 20 Jahren kauft man mit *100\,€* nur noch etwa *61\,€* vom heutigen Wert. Für den Brötchenpreis multipliziert man mit $1{,}025^n$, für die Kaufkraft teilt man durch denselben Faktor. Antwort: Nach 20 Jahren kostet das Brötchen etwa 66 Cent, und 100

€ sind nur noch rund 61 € heutiger Kaufkraft wert.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $q = 0{,}8$: 320; 256; $204{,}8$; $163{,}84$ (in mg). Probe: $400 \cdot 0{,}8^4 = 163{,}84$.
b) $0{,}8^6 \approx 0{,}262$ (noch über $0{,}25$); $0{,}8^7 \approx 0{,}210$: ab der 7. Stunde, also $400 \cdot 0{,}8^7 \approx 83{,}9$ mg.
c) Jede Stunde wird nur $20\,\%$ der Restmenge abgebaut, ein Rest bleibt immer übrig.
d) $163{,}84 + 400 = 563{,}84$ mg.
Ein Abbau von 20 % pro Stunde bedeutet den Faktor 0,8. Antwort: Nach 7 Stunden ist weniger als ein Viertel der Anfangsmenge im Blut; nach der zweiten Dosis sind es rund 564 mg.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Um 1 Prozentpunkt.
b) $\frac{1}{2} = 50\,\%$ relativ.
c) *10000\cdot0{,}01=100\,€*.
d) *10000\cdot1{,}03^{10}-10000\cdot1{,}02^{10}=1249{,}22\,€*.
Prozentpunkte sind die Differenz zweier Prozentsätze, Prozent dagegen beschreibt die relative Änderung. Antwort: Der Zinssatz steigt um 1 Prozentpunkt, das sind 50 %; nach 10 Jahren bringt das bei 10 000 € rund 1249 € mehr.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $q = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}0718$.
b) $p \approx 7{,}18\,\%$.
c) $\frac{72}{7{,}18} \approx 10{,}0$ Jahre, also fast 10 Jahre.
d) $\frac{72}{6} = 12$ Jahre; tatsächlich $1{,}06^{12} \approx 2{,}012$. Die Regel stimmt sehr gut.
Antwort: Für eine Verdopplung in 10 Jahren braucht man etwa 7,18 % Zinsen. Die 72er-Regel ist eine sehr gute Näherung für Zinssätze zwischen etwa 2 % und 10 %.