Lernzettel - Prisma und Zylinder

Klasse: Klasse 8

Prismen und Zylinder begegnen dir bei Schachteln, Dosen und Dachböden. Du berechnest ihr Volumen und ihre Oberfläche.

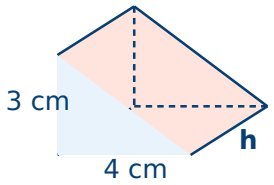
Einstieg: Warum sind Dosen rund?

Im Supermarkt stehen Getränkedosen, Konservendosen und Schokoladenschachteln. Die meisten Dosen sind Zylinder, Schachteln dagegen oft Prismen. Eine Getränkedose fasst 330 Milliliter, das sind 330 Kubikzentimeter. Wie hoch ist sie bei einem Radius von $3{,}3$ cm? Aus $V = \pi r^2 h$ folgt $h = \frac{330}{\pi \cdot 3{,}3^2} \approx 9{,}65$ cm. Aber wie viel Blech braucht der Hersteller? Dafür berechnest du die Oberfläche. Beides hängt von der Form ab: Bei gleichem Inhalt braucht die eine Dose mehr Blech als die andere. In diesem Kapitel lernst du, Volumen und Oberfläche von Prismen und Zylindern sicher zu berechnen, Einheiten umzurechnen und Aufgaben aus dem Alltag zu lösen, von der Regentonne bis zum Dachboden.

Prisma und Zylinder

Definition: Prisma

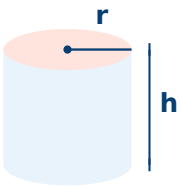
Ein **Prisma** ist ein Körper mit zwei zueinander parallelen, deckungsgleichen Vielecken als Grund- und Deckfläche. Die Seitenflächen sind Rechtecke. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Körperhöhe** h. Auch Würfel und Quader sind Prismen.



\n

Definition: Zylinder

Ein **Zylinder** ist ein Körper mit zwei parallelen, deckungsgleichen Kreisen als Grund- und Deckfläche, also ein „Prisma mit rundem Boden“. Die gekrümmte Seitenfläche heißt **Mantel**. Rollst du den Mantel ab, erhältst du ein Rechteck mit der Breite $2\pi r$ und der Höhe h.



\n

Volumen

Satz: Volumen

$$V = G \cdot h$$

Volumen = Grundfläche mal Höhe. Beim Zylinder ist $G = \pi r^2$, also $V = \pi r^2 h$.

Merke: Einheiten

Das Volumen misst man in Kubikeinheiten (cm³, m³). Es gilt $1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3$.

Oberfläche



\n

Satz: Oberfläche

$$O = 2 \cdot G + M$$

Die Mantelfläche M ist beim Prisma die Summe aller Rechtecke: $M = u \cdot h$ (Umfang der Grundfläche mal Höhe). Beim Zylinder gilt $M = 2\pi r \cdot h$, also $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

So gehst du vor: Prisma oder Zylinder berechnen

1. Zeichne eine Skizze und beschrifte G, h und M.
2. Rechne alle Maße in dieselbe Einheit um.
3. Berechne die Grundfläche mit der passenden Formel (Dreieck $\frac{1}{2}gh$, Trapez $\frac{a+c}{2}h$, Rechteck ab, Kreis πr^2).
4. Berechne $V = G \cdot h$ und $M = u \cdot h$.
5. Berechne $O = 2G + M$ und schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 1: Dreiecksprisma

Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm (Hypotenuse 5 cm), die Körperhöhe ist 10 cm.

Grundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ cm². Volumen: $V = 6 \cdot 10 = 60$ cm³.

Mantel: $M = (3 + 4 + 5) \cdot 10 = 120$ cm². Oberfläche: $O = 2 \cdot 6 + 120 = 132$ cm².

Beispiel 2: Zylinder

Ein Zylinder hat $r = 3$ cm und $h = 10$ cm.

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \approx 282{,}74$ cm³.

$M = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi \approx 188{,}50$ cm². $O = 2\pi \cdot 9 + 188{,}50 \approx 245{,}04$ cm².

Beispiel 3: Höhe aus dem Volumen

Ein Zylinder mit $r = 4$ cm soll 500 cm³ fassen. Wie hoch ist er?

Aus $V = \pi r^2 h$ folgt $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{500}{16\pi} \approx 9{,}95$ cm.

Beispiel 4: Dachboden

Ein Dachboden hat einen dreieckigen Querschnitt mit der Grundseite 8 m und der Höhe 3 m. Er ist 12 m lang. Wie groß ist sein Volumen?

Die Querschnittsfläche ist die Grundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ m².

Das Prisma liegt auf der Seite, die „Höhe“ ist die Länge 12 m. $V = 12 \cdot 12 = 144$ m³.

Beispiel 5: Offenes Gefäß

Ein Blumentopf ist ein oben offener Zylinder mit $r = 10$ cm und $h = 15$ cm. Wie viel Fläche streichst du außen an, wie viel Erde passt hinein?

Du brauchst Mantel und Boden, aber keinen Deckel:
$O = \pi r^2 + 2\pi r h \approx 314{,}16 + 942{,}48 = 1256{,}64$ cm².

$V = \pi \cdot 100 \cdot 15 \approx 4712$ cm³, also etwa 4,7 Liter Erde.

Skalierung

Merke: Was passiert bei größeren Körpern?

Verdoppelst du beim Zylinder die Höhe, verdoppelt sich das Volumen. Verdoppelst du den Radius, wird das Volumen viermal so groß, weil r quadratisch eingeht. Ein Zylinder mit $r = 3$ cm und $h = 8$ cm hat 72π cm³. Mit $r = 4$ cm braucht er nur $h = 4{,}5$ cm für dasselbe Volumen.

Netze verstehen

Das Netz eines Körpers entsteht, wenn du ihn an den Kanten aufschneidest und flach auslegst. Beim Zylinder besteht das Netz aus zwei Kreisen und einem Rechteck. Die Länge des Rechtecks ist der Kreisumfang $2\pi r$, seine Breite die Höhe h. Beim Prisma besteht der Mantel aus lauter Rechtecken mit gleicher Höhe h, nebeneinandergelegt zu einem großen Rechteck mit der Länge u (Umfang der Grundfläche). Das Netz hilft dir, die Oberfläche systematisch zu berechnen und nichts zu vergessen.

Beispiel 6: Netz eines Sechseck-Prismas

Die Grundfläche eines Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 5 cm und der Fläche $64{,}95\,\text{cm}^2$. Das Prisma ist 12 cm hoch. Berechne Volumen und Oberfläche.

Volumen: $V = 64{,}95 \cdot 12 = 779{,}4\,\text{cm}^3$. Umfang der Grundfläche: $u = 6 \cdot 5 = 30$ cm. Mantel: $M = 30 \cdot 12 = 360\,\text{cm}^2$. Oberfläche: $O = 2 \cdot 64{,}95 + 360 = 489{,}9\,\text{cm}^2$.

Einheiten und Hohlmaße

Beim Volumen springen die Einheiten in Tausenderschritten: $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{dm}^3$ und $1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$. Ein Liter ist ein Kubikdezimeter. Ein Milliliter ist ein Kubikzentimeter. Wenn du in Zentimetern rechnest, kommt das Volumen in cm^3 heraus, das teilst du durch 1000 für Liter. Rechne alle Maße zuerst in dieselbe Einheit um, sonst entsteht Unsinn: Ein Becken mit 25 m Länge und 300 cm Tiefe musst du entweder alles in Meter oder alles in Zentimeter setzen.

Beispiel 7: Aquarium

Ein Aquarium ($1{,}2$ m lang, 40 cm breit, 50 cm hoch) wird bis 5 cm unter den Rand gefüllt. Wie viele Liter Wasser sind das?

Alles in dm: $12 \cdot 4 \cdot 4{,}5 = 216\,\text{dm}^3 = 216$ Liter. Die Wasserhöhe ist $50 - 5 = 45$ cm $= 4{,}5$ dm.

Optimale Verpackungen

Ein Hersteller möchte bei gleichem Inhalt möglichst wenig Material verbrauchen. Für Zylinder ist die Form mit $h = 2r$ am sparsamsten: Die Dose ist dann so hoch wie breit. In der Praxis spielen aber weitere Dinge eine Rolle: Dosen müssen gut in der Hand liegen, ins Regal passen und sich stapeln lassen. Deshalb sind echte Dosen meist etwas höher als optimal.

Beispiel 8: Kerze einschmelzen

Eine Kerze ($r = 4$ cm, $h = 15$ cm) wird eingeschmolzen und in kleine Teelichter ($r = 2$ cm, $h = 1{,}5$ cm) gegossen. Wie viele Teelichter entstehen?

Volumen der Kerze: $\pi \cdot 16 \cdot 15 = 240\pi$. Volumen eines Teelichts: $\pi \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 6\pi$. Anzahl: $\frac{240\pi}{6\pi} = 40$. Das π kürzt sich weg, du kannst also ohne Taschenrechner rechnen.

Beispiel 9: Ein Quader als Prisma

Ein Schwimmbad plant ein Lehrschwimmbecken: 12 m lang, 6 m breit, $1{,}2$ m tief. Wie viele Kubikmeter Wasser sind nötig, und wie viele Fliesen (20 cm $\times$ 20 cm) braucht man für den Boden?

Volumen: $12 \cdot 6 \cdot 1{,}2 = 86{,}4\,\text{m}^3$. Bodenfläche: $12 \cdot 6 = 72\,\text{m}^2$. Eine Fliese hat $0{,}04\,\text{m}^2$, also $\frac{72}{0{,}04} = 1800$ Fliesen.

Achtung: Häufige Fehler bei Körpern

Erstens: Beim Prisma ist die Körperhöhe h etwas anderes als die Höhe des Dreiecks in der Grundfläche. Zweitens: Beim offenen Gefäß fehlt die Deckfläche. Drittens: Rechne zuerst alle Maße in dieselbe Einheit um, bevor du $V = G \cdot h$ benutzt. Viertens: Das Volumen hat die Einheit cm^3, die Oberfläche cm^2.

Wusstest du?

Der griechische Gelehrte Archimedes fand heraus, dass eine Kugel in einem Zylinder genau zwei Drittel des Zylindervolumens hat. Er wünschte sich diese Figur sogar auf seinem Grabstein. Heute berechnen wir mit den Formeln für Prismen und Zylinder Tanks, Rohre, Silos und Kerzen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Prisma: Grund- und Deckfläche sind deckungsgleiche Vielecke, die Seitenflächen sind Rechtecke.
- Zylinder: Grund- und Deckfläche sind Kreise; der abgerollte Mantel ist ein Rechteck mit der Breite $2\pi r$.
- Volumen: $V = G \cdot h$; beim Zylinder $V = \pi r^2 h$.
- Oberfläche: $O = 2G + M$; Mantel Prisma $M = u \cdot h$, Mantel Zylinder $M = 2\pi r h$.
- Umrechnung: $1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$ und $1\,\text{m}^3 = 1000$ l.
- Verdoppelter Radius: vierfaches Volumen; verdoppelte Höhe: doppeltes Volumen.
- Offene Gefäße haben keine Deckfläche; zeichne ein Netz, dann siehst du, welche Flächen dazugehören.
- Rückwärts rechnen: $h = \frac{V}{G}$ und $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$.

Achtung

Setze den Radius ein, nicht den Durchmesser. Vergiss bei der Oberfläche die zweite Kreisfläche nicht ($2G$). Verwechsle nicht die Körperhöhe mit der Höhe des Dreiecks in der Grundfläche. Mische nicht cm und m. Rechne Volumen in Liter um: 1000 cm³ sind 1 l. Bei einem oben offenen Gefäß lässt du die Deckfläche weg.

Vertiefung: Prismen und Zylinder im Alltag

Einstieg: Der Stapel aus Bierdeckeln

Legt man viele gleiche runde Bierdeckel übereinander, entsteht ein Zylinder. Sein Volumen ist die Fläche eines Deckels mal die Höhe des Stapels. Mit quadratischen Notizzetteln entsteht ebenso ein Quader. Diese Vorstellung erklärt, warum für alle Prismen und Zylinder dieselbe Grundformel $V = G \cdot h$ gilt: Man stapelt die Grundfläche bis zur Körperhöhe. Schiebt man den Stapel schräg, ändert sich das Volumen nicht, denn jede Schicht bleibt gleich groß. Das ist das Prinzip des italienischen Mathematikers Cavalieri.

So gehst du vor: Körperberechnungen sicher lösen

1. Erkenne die Grundfläche: Das ist die Fläche, die sich parallel durch den ganzen Körper zieht, nicht unbedingt die Fläche, auf der der Körper steht.
2. Berechne die Grundfläche mit der passenden Flächenformel (Dreieck, Trapez, Kreis …).
3. Multipliziere mit der Körperhöhe für das Volumen.
4. Für die Oberfläche addiere zweimal die Grundfläche und den Mantel. Der Mantel ist Umfang der Grundfläche mal Körperhöhe.
5. Achte auf einheitliche Einheiten und rechne am Ende bei Bedarf in Liter um: $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$.

Achtung: Die Höhe des Dreiecks ist nicht die Körperhöhe

Bei einem Dreiecksprisma gibt es zwei verschiedene Höhen: die Höhe des Dreiecks, die man für die Grundfläche braucht, und die Körperhöhe, also den Abstand der beiden Dreiecke. Viele Fehler entstehen, weil beide verwechselt werden. Beschrifte deshalb in einer Skizze die Dreieckshöhe mit h_G und die Körperhöhe mit h_K.

Beispiel: Ein Rohr als Hohlzylinder

Ein Betonrohr ist 2 m lang, hat außen den Radius 30 cm und innen den Radius 25 cm. Wie viel Beton steckt darin?

Ein Rohr ist ein Hohlzylinder. Man berechnet das Volumen des äußeren Zylinders und zieht das Volumen des inneren Hohlraums ab. Mit Längen in Metern ergibt sich $V = \pi \cdot (0{,}3^2 - 0{,}25^2) \cdot 2 = \pi \cdot 0{,}0275 \cdot 2 \approx 0{,}173\,\mathrm{m}^3$. Die Grundfläche ist hier ein Kreisring, die Grundformel „Grundfläche mal Höhe“ gilt aber unverändert.

Ottos Tipp

Zeichne immer ein kleines Netz oder eine Skizze und beschrifte G, h und M. Dann siehst du genau, welche Flächen zur Oberfläche gehören. Beim Zylinder gehören die obere und die untere Kreisfläche dazu, wenn nichts anderes dasteht.