Lösungen - Prisma und Zylinder

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) Würfel: $4^3 = 64\,\text{cm}^3$; Quader: $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120\,\text{cm}^3$; Prisma: $12 \cdot 7 = 84\,\text{cm}^3$.
b) Der Quader mit $120\,\text{cm}^3$.
Alle drei Körper sind Prismen, deshalb gilt überall $V = G \cdot h$. Beim Würfel und beim Quader ist die Grundfläche ein Quadrat bzw. ein Rechteck. Volumen haben immer eine Kubikeinheit. Antwort: Der Quader ist mit 120 cm³ am größten, das Prisma liegt mit 84 cm³ dazwischen, der Würfel ist mit 64 cm³ am kleinsten.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\,\text{cm}^2$; $V = 12 \cdot 10 = 120\,\text{cm}^3$.
b) $G = \frac{8+4}{2} \cdot 3 = 18\,\text{cm}^2$; $V = 18 \cdot 5 = 90\,\text{cm}^3$.
c) $G = 7 \cdot 2{,}5 = 17{,}5\,\text{cm}^2$; $V = 17{,}5 \cdot 4 = 70\,\text{cm}^3$.
Zuerst berechnet man die Grundfläche mit der Formel der jeweiligen Figur, danach multipliziert man mit der Körperhöhe. Beim Trapez ist die Grundfläche das Produkt aus Mittellinie und Höhe. Antwort: Das Dreiecksprisma hat mit 120 cm³ das größte Volumen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $V = \pi \cdot 9 \cdot 10 = 282{,}74\,\text{cm}^3$.
b) $V = \pi \cdot 25 \cdot 8 = 628{,}32\,\text{cm}^3$.
c) $r = 6$; $V = \pi \cdot 36 \cdot 5 = 565{,}49\,\text{cm}^3$.
Beim Zylinder ist die Grundfläche ein Kreis, also $G = \pi r^2$. Bei c) ist der Durchmesser gegeben, deshalb wird er zuerst halbiert. Ein Überschlag mit $\pi \approx 3$ zeigt bei a) etwa 270 cm³, das passt. Antwort: Die Volumina betragen etwa 283 cm³, 628 cm³ und 565 cm³.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $M = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 188{,}50\,\text{cm}^2$; $O = 2\pi \cdot 9 + M = 245{,}04\,\text{cm}^2$.
b) $M = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 150{,}80\,\text{cm}^2$; $O = 2\pi \cdot 16 + M = 251{,}33\,\text{cm}^2$.
Der Mantel ist das abgerollte Rechteck aus Kreisumfang und Höhe. Zur Oberfläche gehören zusätzlich Boden und Deckel, also zwei Kreise. Antwort: Die Oberflächen betragen etwa 245 cm² und 251 cm².

Lösung zu Aufgabe 5

a) Breite $2\pi \cdot 2 = 12{,}57$ cm, Höhe 7 cm.

b) $M = 12{,}57 \cdot 7 = 87{,}96\,\text{cm}^2$.
c) Breite $2\pi \cdot 3{,}5 + 1 = 22{,}99$ cm, Höhe 12 cm.
Rollt man den Mantel ab, entsteht ein Rechteck, dessen Breite der Kreisumfang ist. Beim Etikett kommt zur Breite noch die Klebefläche hinzu, die Höhe bleibt gleich. Antwort: Das Etikett muss etwa 23 cm breit und 12 cm hoch sein.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $G = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\,\text{cm}^2$.
b) $V = 6 \cdot 10 = 60\,\text{cm}^3$.
c) $u = 3 + 4 + 5 = 12$; $M = 12 \cdot 10 = 120\,\text{cm}^2$.
d) $O = 2 \cdot 6 + 120 = 132\,\text{cm}^2$.
Der Mantel eines Prismas besteht aus Rechtecken, deren Breiten zusammen den Umfang der Grundfläche ergeben. Deshalb gilt $M = u \cdot h$. Antwort: Das Prisma hat ein Volumen von 60 cm³ und eine Oberfläche von 132 cm².

Lösung zu Aufgabe 7

a) $V = \pi \cdot 25 \cdot 20 = 1570{,}8\,\text{cm}^3 \approx 1{,}57$ l.
b) $80 \cdot 40 \cdot 50 = 160\,000\,\text{cm}^3 = 160$ l.
c) $2{,}5 \cdot 1000 = 2500$ l.
d) $330\,\text{ml} = 330\,\text{cm}^3 = 0{,}33\,\text{dm}^3$.
Merke: 1 Liter entspricht einem Würfel mit 10 cm Kantenlänge, also 1000 cm³. Um von cm³ in Liter umzurechnen, teilt man durch 1000. Ein Milliliter ist genau ein Kubikzentimeter. Antwort: Der Zylinder fasst gut 1,5 Liter, das Aquarium 160 Liter.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $h = \frac{500}{\pi \cdot 16} = 9{,}95$ cm.
b) $r = \sqrt{\frac{1000}{10\pi}} = 5{,}64$ cm.
c) $h = \frac{240}{30} = 8$ cm.
Beim Rückwärtsrechnen stellt man die Volumenformel nach der gesuchten Größe um. Ist der Radius gesucht, teilt man durch πh und zieht danach die Wurzel. Probe zu a): $\pi \cdot 16 \cdot 9{,}95 \approx 500$. Antwort: Die Höhe beträgt knapp 10 cm, der Radius gut 5,6 cm und die Prismenhöhe 8 cm.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $V = \pi \cdot 9 \cdot 8 = 72\pi \approx 226{,}19\,\text{cm}^3$.
b) Doppelte Höhe: doppeltes Volumen $144\pi \approx 452{,}39\,\text{cm}^3$.
c) Doppelter Radius: vierfaches Volumen $288\pi \approx 904{,}78\,\text{cm}^3$.
d) $\pi \cdot 16 \cdot h = 72\pi$, $h = \frac{72}{16} = 4{,}5$ cm.
Antwort: Verdoppelt man die Höhe, verdoppelt sich das Volumen; verdoppelt man den Radius, vervierfacht es sich, weil der Radius quadratisch eingeht. Ein breiterer Zylinder

braucht deshalb viel weniger Höhe für dasselbe Volumen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h = \frac{330}{\pi \cdot 3{,}3^2} = 9{,}65$ cm.
b) $M = 2\pi \cdot 3{,}3 \cdot 9{,}65 \approx 200{,}1\,\text{cm}^2$.
c) $O = 2\pi \cdot 3{,}3^2 + M \approx 268{,}5\,\text{cm}^2$.
d) *268{,}6\cdot0{,}004\approx1{,}07\,€* pro Dose; für 1000 Dosen etwa *1074\,€*.
Zuerst wird die Formel $V = \pi r^2 h$ nach h umgestellt, wobei 330 ml = 330 cm³ gilt. Für den Blechbedarf braucht man die gesamte Oberfläche. Antwort: Die Dose ist etwa 9,65 cm hoch, das Blech für 1000 Dosen kostet rund 1074 €.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $V = \pi \cdot 40^2 \cdot 90 = 452{,}4$ l.
b) $300\,\text{l} = 300\,000\,\text{cm}^3$; $h = \frac{300000}{\pi \cdot 1600} = 59{,}7$ cm.
c) $50 \cdot 20 = 1000$ Liter.
d) $\frac{1000}{452{,}4} \approx 2{,}21$: mindestens 3 Tonnen.
Vor dem Rechnen werden die Einheiten angeglichen: Volumen in cm³ geteilt durch 1000 ergibt Liter. Antwort: Eine Tonne fasst rund 452 Liter; für 1000 Liter Regenwasser braucht man 3 Tonnen.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $G = \frac{1+2}{2} \cdot 25 = 37{,}5\,\text{m}^2$.
b) $V = 37{,}5 \cdot 10 = 375\,\text{m}^3 = 375\,000$ l.
c) *375\cdot2{,}30=862{,}50\,€*.
d) $375 : 25 = 15$ Stunden.
Das Becken ist ein liegendes Prisma, dessen Grundfläche das Trapez der Seitenwand ist. Die Breite von 10 m ist die Körperhöhe. Antwort: Das Becken fasst 375 000 Liter, eine Füllung kostet 862,50 € und dauert 15 Stunden.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $G = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12\,\text{m}^2$.
b) $V = 12 \cdot 12 = 144\,\text{m}^3$.
c) $s = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m.
d) $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120\,\text{m}^2$.
e) *120\cdot14=1680\,€*.
Der Dachboden ist ein Dreiecksprisma mit der Hauslänge als Körperhöhe. Die Dachschräge berechnet man im rechtwinkligen Dreieck aus halber Grundseite und Höhe. Antwort: Der Dachboden hat 144 m³, die Dämmung kostet 1680 €.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $V = \pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 2{,}4 = 0{,}170\,\mathrm{m}^3$.
b) $0{,}1696 \cdot 2400 \approx 407$ kg.
c) $M = 2\pi \cdot 0{,}15 \cdot 2{,}4 = 2{,}26\,\mathrm{m}^2$.
d) $\frac{8}{2{,}26} \approx 3{,}5$: bis zu 3 Säulen.
Alle Längen werden zuerst in Meter umgerechnet: Radius 0,15 m. Gewicht = Volumen mal Dichte. Antwort: Die Säule wiegt rund 407 kg; ein Eimer Farbe reicht für 3 Säulen.

Lösung zu Aufgabe 15

a) A: $\pi \cdot 9 \cdot 11{,}8 = 333{,}6$; B: $\pi \cdot 16 \cdot 6{,}6 = 331{,}8$; C: $\pi \cdot 6{,}25 \cdot 17 = 333{,}8$ (in cm^3).
b) A: $2\pi \cdot 9 + 2\pi \cdot 3 \cdot 11{,}8 = 279{,}0$; B: $266{,}4$; C: $306{,}3$ (in cm^2).
c) Dose B (Radius 4 cm) braucht am wenigsten Blech.
d) Die Form mit $h \approx 2r$ (nicht zu hoch, nicht zu flach) ist am sparsamsten; Dose B kommt dem am nächsten.
e) Schmale Dosen liegen besser in der Hand und stapeln sich platzsparender im Regal; Blechverbrauch ist nicht das einzige Kriterium.
Bei gleichem Volumen haben die Dosen sehr unterschiedliche Oberflächen. Am wenigsten Material braucht ein Zylinder, dessen Höhe ungefähr gleich seinem Durchmesser ist. Antwort: Dose B ist am sparsamsten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $G = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}46 = 6{,}93\,\mathrm{cm}^2$.
b) $V = 6{,}93 \cdot 20 = 138{,}6\,\mathrm{cm}^3$.
c) $M = 3 \cdot 4 \cdot 20 = 240\,\mathrm{cm}^2$; $O = 2 \cdot 6{,}93 + 240 = 253{,}9\,\mathrm{cm}^2$.
d) $253{,}9\,\mathrm{cm}^2 = 2{,}54\,\mathrm{dm}^2$; *2{,}54\cdot0{,}07\approx0{,}18\,€*.
e) Länge: $40 : 20 = 2$; Breite: $30 : 4 = 7{,}5$, also 7; Höhe: $20 : 3{,}46 \approx 5{,}8$, also 5. Das sind $2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$ Schachteln. Genutztes Volumen: $70 \cdot 138{,}6 \approx 9702\,\mathrm{cm}^3$ von $24\,000\,\mathrm{cm}^3$, also etwa $40\,\%$.
Die Grundfläche ist hier das gleichseitige Dreieck, die Länge der Schachtel die Körperhöhe. Für die Pappe braucht man die gesamte Oberfläche. Antwort: In den Karton passen 70 Schachteln, das Volumen wird nur zu etwa 40 % genutzt.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $80 \cdot 25 = 2000$ l.
b) $\pi \cdot 50^2 \cdot 100 = 785{,}4$ l.
c) $\frac{2000}{785{,}4} \approx 2{,}55$: mindestens 3 Tonnen.
d) $\frac{2000}{3} \approx 666{,}7\,\mathrm{l} = 666\,700\,\mathrm{cm}^3$; $h = \frac{666667}{\pi \cdot 2500} \approx 84{,}9$ cm.
Ein Liter pro Quadratmeter entspricht 1 mm Regen. Antwort: Vom Dach kommen 2000 Liter, eine Tonne fasst rund 785 Liter, man braucht 3 Tonnen; bei gleichmäßiger Verteilung steht das Wasser jeweils etwa 85 cm hoch.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $V = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 3 = 0{,}377\,\mathrm{m}^3$.
b) $a^2 + a^2 = 0{,}4^2$, $a = \sqrt{0{,}08} = 0{,}283$ m, also $28{,}3$ cm.
c) $a^2 \cdot 3 = 0{,}08 \cdot 3 = 0{,}24\,\mathrm{m}^3$.
d) $\frac{0{,}377 - 0{,}24}{0{,}377} \approx 36{,}3\,\%$ (genau: $1 - \frac{2}{\pi}$).
e) $M = 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 3 = 3{,}77\,\mathrm{m}^2$; Erlös *3{,}77\cdot8\approx30{,}16\,€*.
Die Diagonale des Quadrats ist der Durchmesser des Stammes, deshalb hilft der Satz des Pythagoras. Antwort: Der Balken hat 0,24 m³, gut ein Drittel des Holzes wird Abfall; die Rinde bringt etwa 30 €.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$; $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$.
b) $2\pi r^3 = 6\pi r^2$ ergibt $r = 3$.
c) $r = 3$: $V = 54\pi \approx 169{,}65$, $O = 54\pi \approx 169{,}65$.
d) Volumen hat die Einheit cm^3, die Oberfläche cm^2; nur die Zahlenwerte sind gleich.
Antwort: Bei $r = 3$ haben Volumen und Oberfläche denselben Zahlenwert 54π. Die Größen selbst sind aber nicht vergleichbar, weil sie verschiedene Einheiten haben.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $r = \frac{29{,}7}{2\pi} = 4{,}73$ cm, $h = 21$ cm; $V = \pi r^2 h \approx 1474\,\mathrm{cm}^3$.
b) $r = \frac{21}{2\pi} = 3{,}34$ cm, $h = 29{,}7$ cm; $V \approx 1042\,\mathrm{cm}^3$.
c) Fall 1 fasst mehr, $\frac{1475 - 1042}{1042} \approx 41\,\%$ mehr.
d) Der Mantel ist gleich groß, aber das Volumen hängt quadratisch vom Radius ab ($V = \frac{U^2 h}{4\pi}$). Der größere Umfang bringt mehr als die größere Höhe.
Antwort: Rollt man das Blatt so, dass die lange Seite der Umfang ist, fasst der Zylinder rund 41 % mehr. Der Radius geht quadratisch in das Volumen ein, die Höhe nur einfach.