Lernzettel - Mehrstufige Zufallsexperimente

Klasse: Klasse 8

Viele Zufallsexperimente bestehen aus mehreren Schritten, etwa zweimal würfeln oder nacheinander zwei Kugeln ziehen. Mit dem Baumdiagramm behältst du den Überblick.

Einstieg: Das Schulfest-Glücksrad

Beim Schulfest steht ein Glücksrad. Man darf nur dann würfeln, wenn das Rad auf Gewinn zeigt, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ passiert. Würfelt man danach eine Sechs ($\frac{1}{6}$), gibt es den Hauptpreis. Wie wahrscheinlich ist der Hauptpreis? Du musst beide Stufen hintereinander schaffen: Das geht nur auf einem Pfad, und seine Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$. Solche Experimente heißen mehrstufig, und das Baumdiagramm hilft dir, den Überblick zu behalten. In diesem Kapitel lernst du, wann du Wahrscheinlichkeiten multiplizierst und wann du sie addierst, wie sich das Ziehen ohne Zurücklegen auswirkt und wie du mit dem Gegenereignis Aufgaben vereinfachst.

Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit

Definition: Zufallsexperiment

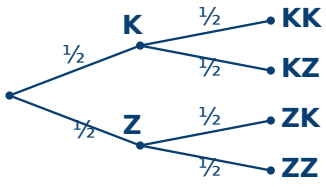
Bei einem **Zufallsexperiment** weißt du vorher nicht, welches Ergebnis eintritt, zum Beispiel beim Werfen einer Münze. Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses gibt an, wie sicher es eintritt. Sie liegt zwischen 0 (unmöglich) und 1 (sicher).

Regel: Gleich wahrscheinliche Ergebnisse

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Definition: mehrstufiges Zufallsexperiment

Ein **mehrstufiges Zufallsexperiment** besteht aus mehreren Schritten hintereinander. Du stellst es in einem **Baumdiagramm** dar: Jede Stufe ist eine Verzweigung, jeder Ast trägt die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses dieser Stufe.



\n

Die Pfadregeln

Satz: Pfadregeln

- **1. Pfadregel (Produktregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang seiner Äste.
- **2. Pfadregel (Summenregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das aus mehreren Pfaden besteht, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Pfade.

Merke: Kontrolle

Die Äste, die von einem Knoten ausgehen, ergeben zusammen 1. Auch alle Pfade eines Baumdiagramms ergeben zusammen 1.

So gehst du vor: Aufgabe mit Baumdiagramm

1. Stelle fest, wie viele Stufen es gibt und ob zurückgelegt wird.
2. Zeichne das Baumdiagramm und schreibe die Wahrscheinlichkeiten an die Äste.
3. Markiere die Pfade, die zum gesuchten Ereignis gehören.
4. Multipliziere entlang jedes Pfades und addiere die Pfade.
5. Kontrolliere, ob alle Pfade zusammen 1 ergeben, und schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 1: Zweimal würfeln

Wie wahrscheinlich sind zwei Sechsen, wie wahrscheinlich ist mindestens eine Sechs?

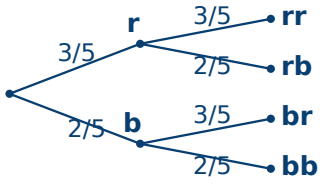
Jeder Wurf hat $P(6) = \frac{1}{6}$. Pfadregel 1: $P(6;6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Keine Sechs in zwei Würfen: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Mindestens eine Sechs ist das Gegenereignis: $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Ziehen mit Zurücklegen

Regel: Mit Zurücklegen

Wird die gezogene Kugel zurückgelegt, bleiben die Wahrscheinlichkeiten in jeder Stufe gleich. Die Stufen sind **unabhängig**.



\n

Beispiel 2: Zwei Kugeln mit Zurücklegen

Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue Kugeln. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten?

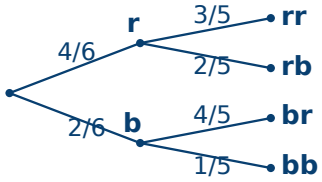
$P(r) = \frac{3}{5}$, $P(b) = \frac{2}{5}$. Dann $P(rr) = \frac{9}{25}$, $P(bb) = \frac{4}{25}$, $P(rb) = P(br) = \frac{6}{25}$.

Zwei verschiedene Farben: $\frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$. Kontrolle: $\frac{9+6+6+4}{25} = 1$.

Ziehen ohne Zurücklegen

Regel: Ohne Zurücklegen

Ohne Zurücklegen ändert sich die Zusammensetzung der Urne. In der zweiten Stufe ist eine Kugel weniger drin, und die Wahrscheinlichkeiten hängen vom ersten Ergebnis ab. Die Stufen sind **abhängig**.



\n

Beispiel 3: Zwei Kugeln ohne Zurücklegen

Dieselbe Urne (3 rot, 2 blau), zweimal ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Kugeln verschiedener Farbe?

Erste Stufe: $P(r) = \frac{3}{5}$, $P(b) = \frac{2}{5}$. Nach einer roten Kugel sind noch 2 rote und 2 blaue da: $P(r|r) = \frac{2}{4}$.

$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ und $P(bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Verschiedene Farben: $1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.

Beispiel 4: Klasse

In einer Klasse mit 12 Mädchen und 8 Jungen werden zwei Personen zufällig ausgewählt. Wie wahrscheinlich sind beide Mädchen?

$\frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}$. Im zweiten Zug sind nur noch 19 Personen übrig, davon 11 Mädchen.

Gegenereignis

Regel: Gegenereignis

Bei „mindestens einmal“ ist es oft einfacher, das Gegenereignis „keinmal“ zu berechnen und von 1 abzuziehen: $P(\text{mindestens einmal}) = 1 - P(\text{keinmal})$.

Beispiel 5: Trefferquote 70 %

Ein Basketballer trifft mit 70 % und wirft dreimal. Wie groß sind $P(\text{drei Treffer})$, $P(\text{genau zwei Treffer})$ und $P(\text{mindestens ein Treffer})$?

Drei Treffer: $0{,}7^3 = 0{,}343$.

Genau zwei Treffer gibt es auf drei Pfaden (TTN, TNT, NTT), jeder mit $0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$. Zusammen $3 \cdot 0{,}147 = 0{,}441$.

Mindestens ein Treffer: $1 - 0{,}3^3 = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.

Beispiel 6: Qualitätskontrolle

5 % der Teile einer Fabrik sind defekt. Zwei Teile werden unabhängig entnommen. Wie wahrscheinlich ist mindestens ein defektes Teil?

Beide in Ordnung: $0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$.

Mindestens eines defekt: $1 - 0{,}9025 = 0{,}0975$, also etwa 9,75 %.

Unabhängig oder abhängig?

Hinweis

Zwei Stufen sind **unabhängig**, wenn das Ergebnis der ersten Stufe die Wahrscheinlichkeiten der zweiten nicht verändert, etwa bei zwei Würfen mit einem Würfel oder beim Ziehen mit Zurücklegen. Sie sind **abhängig**, wenn sich die Bedingungen ändern, zum Beispiel beim Ziehen ohne Zurücklegen.

Das Baumdiagramm zeichnen

Ein sauberes Baumdiagramm ist die halbe Lösung. Du beginnst links mit einem Startpunkt, zeichnest für jedes Ergebnis der ersten Stufe einen Ast und schreibst die Wahrscheinlichkeit daran. Von jedem Endpunkt gehen die Äste der zweiten Stufe aus. Am Ende jedes Pfades steht das Gesamtergebnis, zum Beispiel „rot, blau“. Die Pfadwahrscheinlichkeit schreibst du dahinter. Wenn du alle Pfade addierst, muss genau 1 herauskommen. Das ist deine wichtigste Kontrolle.

Beispiel 7: Zwei Stufen mit Bedingung

Für Samstag wird mit $40\,\%$ Regen vorhergesagt. Nach einem Regentag regnet es am Sonntag mit $50\,\%$, sonst mit $10\,\%$. Wie wahrscheinlich ist Regen am Sonntag?

Pfad Regen-Regen: $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$. Pfad kein Regen-Regen: $0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$. Beide Pfade führen zu „Regen am Sonntag“, also $0{,}2 + 0{,}06 = 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $26\,\%$.

Genau, höchstens, mindestens

Mit den Wörtern „genau“, „höchstens“ und „mindestens“ musst du aufpassen. Bei „genau zwei Treffer in drei Würfen“ gibt es drei Pfade, nämlich die Position der Nichttreffer. „Höchstens ein Treffer“ heißt null oder ein Treffer, „mindestens zwei“ heißt zwei oder drei. Oft ist das Gegenereignis einfacher: Statt „mindestens einmal“ rechnest du „keinmal“ und ziehst von 1 ab.

Beispiel 8: Fehlerquote

Ein Drucker liefert Seiten mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $2\,\%$. Wie wahrscheinlich ist es, dass unter 3 Seiten mindestens eine fehlerhaft ist?

Gegenereignis „alle drei in Ordnung“: $0{,}98^3 \approx 0{,}9412$. Also $1 - 0{,}9412 = 0{,}0588$, etwa $5{,}9\,\%$.

Ziehen ohne Zurücklegen im Detail

Ohne Zurücklegen sinkt die Anzahl der Kugeln in jeder Stufe um eins, und die Anzahl der Kugeln der gezogenen Farbe sinkt ebenfalls. Du musst daher bei jedem Ast neu zählen. Hilfreich ist, die Urne neben jeden Knoten zu schreiben: „nach rot: 2 rote, 2 blaue“. Übrigens ist das Ziehen von zwei Kugeln gleichzeitig mit dem Ziehen nacheinander ohne Zurücklegen gleichwertig.

Beispiel 9: Drei Kugeln

Eine Urne enthält 4 rote und 2 blaue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich sind drei rote?

$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$. Bei jedem Zug sinkt die Zahl der roten und die Gesamtzahl um eins. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $20\,\%$.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden multipliziert, nicht addiert. Zweitens: Bei „genau eine rote, eine blaue“ gibt es zwei Pfade. Drittens: Prozentangaben vor dem Multiplizieren in Dezimalzahlen umrechnen ($30\,\% = 0{,}3$).

Wusstest du?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand im Jahr 1654 aus einem Briefwechsel zwischen den französischen Mathematikern Blaise Pascal und Pierre de Fermat. Ein Spieler hatte sie gefragt, wie man den Einsatz eines abgebrochenen Würfelspiels gerecht aufteilt. Heute braucht man die Rechnung für Wettervorhersagen, Versicherungen und Medizin.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Wahrscheinlichkeit: $P = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{alle Ergebnisse}}$, immer zwischen 0 und 1.
- Baumdiagramm: Jede Stufe ist eine Verzweigung, jeder Ast trägt die Wahrscheinlichkeit; die Äste eines Knotens ergeben zusammen 1.
- 1. Pfadregel: Entlang eines Pfades werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert.
- 2. Pfadregel: Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, werden deren Wahrscheinlichkeiten addiert.
- Mit Zurücklegen bleiben die Stufen unabhängig; ohne Zurücklegen ändern sich die Zahlen der zweiten Stufe.
- Gegenereignis: $P(\text{mindestens einmal}) = 1 - P(\text{keinmal})$.
- Bei „genau k Treffer“ zählst du alle passenden Pfade und addierst sie.
- Kontrolle: Alle Pfade zusammen ergeben 1.

Achtung

Entlang der Äste wird multipliziert, bei mehreren Pfaden wird addiert. Beim Ziehen ohne Zurücklegen musst du die Zahlen im zweiten Zug anpassen. Bei „genau eine rote und eine blaue“ gibt es zwei Pfade (rb und br). Prozentwerte rechnest du vor dem Multiplizieren in Dezimalzahlen um. Mache immer die Kontrolle „alle Pfade ergeben 1“.

Vertiefung: Baumdiagramme geschickt nutzen

So gehst du vor: Ein Baumdiagramm vollständig auswerten

1. Zeichne für jede Stufe des Experiments eine Verzweigung und schreibe an jeden Ast seine Wahrscheinlichkeit.
2. Kontrolliere: Die Äste, die von einem Punkt ausgehen, ergeben zusammen immer 1.
3. Beim Ziehen ohne Zurücklegen ändern sich in der zweiten Stufe Zähler und Nenner. Überlege genau, was nach dem ersten Zug noch in der Urne liegt.
4. Pfadmultiplikationsregel: Multipliziere entlang eines Pfades.
5. Pfadadditionsregel: Gehören mehrere Pfade zu einem Ereignis, addiere ihre Wahrscheinlichkeiten.
6. Prüfe am Ende, ob alle Pfadwahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben.

Beispiel: Verkürztes Baumdiagramm

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau eine Sechs?

Ein vollständiges Baumdiagramm hätte 216 Pfade. Es genügt aber, nur zwischen „Sechs“ ($\frac{1}{6}$) und „keine Sechs“ ($\frac{5}{6}$) zu unterscheiden. Dann gibt es nur 8 Pfade. Genau eine Sechs entsteht auf drei Pfaden: an erster, zweiter oder dritter Stelle. Jeder dieser Pfade hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$. Zusammen: $3 \cdot \frac{25}{216} = \frac{75}{216} \approx 34{,}7\,\%$.

Schon gewusst?

Mehrstufige Zufallsexperimente stecken in vielen Alltagssituationen: Bei medizinischen Tests, in der Qualitätskontrolle von Fabriken und bei Wettervorhersagen werden Wahrscheinlichkeiten über mehrere Stufen kombiniert. Auch das Gefühl, eine Glückssträhne müsse bald enden, lässt sich mit Baumdiagrammen widerlegen, denn bei unabhängigen Stufen hat das frühere Ergebnis keinen Einfluss auf das nächste.

Ottos Tipp

Zeichne immer ein Baumdiagramm, auch wenn du es nicht brauchst. Schreibe die Wahrscheinlichkeiten an die Äste und das Ergebnis an das Ende jedes Pfades. Merke dir: erst mal, dann plus.