Lösungen - Mehrstufige Zufallsexperimente

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\{2;4;6\}$: $P = \frac{1}{2} = 50\,\%$.
b) $\{5;6\}$: $P = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$.
c) $\{2;3;5\}$: $P = \frac{1}{2} = 50\,\%$.
d) $\{3;6\}$: $P = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$.
Beim fairen Würfel sind alle sechs Augenzahlen gleich wahrscheinlich, deshalb gilt die Laplace-Regel. Man schreibt zuerst die günstigen Ergebnisse als Menge auf und zählt sie. Primzahlen bis 6 sind nur 2, 3 und 5, denn die 1 ist keine Primzahl.

Lösung zu Aufgabe 2

a) KK, KZ, ZK, ZZ.
b) Jeder Pfad: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
c) KZ und ZK: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
d) Gegenereignis ZZ: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Bei zwei Münzwürfen gibt es vier gleich wahrscheinliche Pfade. Für zusammengesetzte Ereignisse addiert man die passenden Pfade. Bei „mindestens einmal“ ist das Gegenereignis „keinmal“ meist einfacher zu berechnen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $P(r) = \frac{3}{5}$, $P(b) = \frac{2}{5}$.
b) $P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; $P(bb) = \frac{4}{25}$.
c) $P(rb) + P(br) = 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.
d) $\frac{9+6+6+4}{25} = 1$. Stimmt.
Mit Zurücklegen bleibt die Urne bei jedem Zug unverändert, deshalb stehen auf beiden Stufen dieselben Wahrscheinlichkeiten. Für verschiedene Farben gibt es zwei Pfade, rot–blau und blau–rot, deren Wahrscheinlichkeiten addiert werden.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Nach dem ersten Zug liegt eine Kugel weniger in der Urne, und ihre Farbe verändert die Zusammensetzung.
b) $P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; $P(bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.
c) $1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.
d) Mit Zurücklegen $\frac{12}{25} = 0{,}48$, ohne $\frac{3}{5} = 0{,}6$: ohne Zurücklegen ist es wahrscheinlicher.
Ohne Zurücklegen hängt die zweite Stufe vom ersten Ergebnis ab: Nach einer roten

Kugel sind nur noch 2 rote von 4 Kugeln übrig. Antwort: Zwei verschiedene Farben sind ohne Zurücklegen wahrscheinlicher, weil die erste Farbe danach seltener ist.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{9+4+1}{36} = \frac{7}{18}$.
c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.
d) Ja: $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6})^2 = 1^2 = 1$.
Die Felder sind unterschiedlich groß, deshalb ist das kein Laplace-Experiment; man rechnet mit den gegebenen Anteilen. Gleiche Farben entstehen auf drei Pfaden, deren Wahrscheinlichkeiten addiert werden. „Keine gelbe“ bedeutet, dass bei jeder Drehung eine der anderen Farben kommt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 57{,}9\,\%$.
b) $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 42{,}1\,\%$.
c) $\frac{1}{216} \approx 0{,}46\,\%$.
d) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$: $n = 12$ ergibt $1 - 0{,}1122 = 0{,}888$; $n = 13$ ergibt $1 - 0{,}0935 = 0{,}907$.
Es braucht mindestens 13 Würfe.
Bei „mindestens eine Sechs“ rechnet man mit dem Gegenereignis „keine Sechs“, denn dafür gibt es nur einen einzigen Pfad. Antwort: Bei drei Würfen fällt mit etwa 42 % mindestens eine Sechs; für mehr als 90 % braucht man 13 Würfe.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $0{,}7^3 = 0{,}343$.
b) Drei Pfade (TTN, TNT, NTT), jeder $0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$: $3 \cdot 0{,}147 = 0{,}441$.
c) $1 - 0{,}3^3 = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.
d) $0{,}027 + 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}09 + 0{,}441 + 0{,}343$: $0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1{,}000$.
Bei mehreren Pfaden mit derselben Anzahl Treffer haben alle Pfade dieselbe Wahrscheinlichkeit, deshalb multipliziert man mit der Anzahl der Pfade. Antwort: Genau zwei Treffer kommen mit 44,1 % am häufigsten vor, mindestens ein Treffer mit 97,3 %.

Lösung zu Aufgabe 8

a) TT: $0{,}64$; TN: $0{,}16$; NT: $0{,}16$; NN: $0{,}04$ (zusammen $1{,}00$).
b) $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$.
c) $2 \cdot 0{,}16 = 0{,}32$.
d) $1 - 0{,}04 = 0{,}96$, also $96\,\%$.
Antwort: Selin trifft mit 64 % beide Elfmeter, mit 32 % genau einen und mit 96 % mindestens einen. Kontrolle: $0{,}64 + 0{,}32 + 0{,}04 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.
b) $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.
c) $0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$.
d) Gegenereignis „an beiden Tagen Regen“: $1 - 0{,}18 = 0{,}82$, also $82\,\%$.
Hier hängt die Wahrscheinlichkeit am Sonntag vom Wetter am Samstag ab, die Stufen sind also nicht unabhängig. Antwort: Mit 82 % regnet es höchstens an einem Tag, die Familie kann den Ausflug also mit großer Wahrscheinlichkeit machen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95} \approx 34{,}7\,\%$.
b) $\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95} \approx 14{,}7\,\%$.
c) $1 - \frac{33}{95} - \frac{14}{95} = \frac{48}{95}$.
d) Die zuerst ausgewählte Person kann nicht noch einmal gewählt werden; es bleiben 19 Personen, und das ist ein Ziehen ohne Zurücklegen.
Antwort: Mit etwa 34,7 % werden zwei Mädchen gewählt, mit 14,7 % zwei Jungen und mit gut 50 % ein gemischtes Paar. Kontrolle: $\frac{33+14+48}{95} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $0{,}95^2 = 0{,}9025$.
b) $1 - 0{,}9025 = 0{,}0975$, also $9{,}75\,\%$.
c) $2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}095$, also $9{,}5\,\%$.
d) $2000 \cdot 0{,}05 = 100$ Klingeln.
Die beiden Prüfungen sind unabhängig, deshalb multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade. Antwort: In 90,25 % der Fälle sind beide Klingeln in Ordnung, und von 2000 Klingeln sind im Mittel 100 defekt.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} = \frac{17}{35} \approx 48{,}6\,\%$.
b) $\frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} = \frac{9}{245} \approx 3{,}7\,\%$.
c) $\frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{3}{35} \approx 8{,}6\,\%$.
d) $1 - \frac{3}{35} = \frac{32}{35} \approx 91{,}4\,\%$.
Da ohne Zurücklegen gezogen wird, verringern sich nach dem ersten Los Zähler und Nenner. Antwort: Mit gut 91 % zieht Anna mindestens eine Niete, zwei Gewinne bekommt sie nur mit 3,7 %.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.
b) $\frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.

c) $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ (beide nicht rot: aus 5 nicht-roten).
d) $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.
Nach dem ersten Bärchen sind nur noch 9 in der Tüte. Für gleiche Farben addiert man die drei Pfade rot–rot, grün–grün und gelb–gelb. Antwort: Mit etwa 31 % haben beide dieselbe Farbe, mit $\frac{7}{9}$ ist mindestens eines rot.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $0{,}5^3 = 0{,}125$.
b) $0{,}8^3 = 0{,}512$.
c) $1 - 0{,}5^3 = 0{,}875$.
d) $0{,}2^3 = 0{,}008$, also nur $0{,}8\,\%$: sehr unwahrscheinlich.
„Kein Spiel verloren“ bedeutet in jedem Spiel Sieg oder Unentschieden, also jeweils $0{,}8$. Antwort: Drei Siege gelingen mit 12,5 %, drei Niederlagen sind mit 0,8 % sehr unwahrscheinlich.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Hauptpreis: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$; Trostpreis: $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{24}$; nichts: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.
b) $\frac{1+5+18}{24} = 1$.
c) Einnahmen *24\,€*. Erwartet: 1 Hauptpreis (*8\,€*) und 5 Trostpreise (*10\,€*): *18\,€*.
d) Pro 24 Spiele *6\,€* Gewinn; bei 240 Spielen *10\cdot6=60\,€*.
e) Auszahlung pro 24 Spiele muss *24\,€* sein: *24-10=14\,€* für einen Hauptpreis. Der Hauptpreis müsste *14\,€* betragen.
Antwort: Bei 240 Spielen verdient die Klasse im Mittel 60 €. Das Spiel wäre bei einem Hauptpreis von 14 € fair, das heißt, der Erwartungswert des Gewinns wäre null.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$.
b) $0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.
c) rgg: $0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$; grg: $0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$; ggr: $0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.
Zusammen $0{,}46$.
d) $1 - 0{,}24 = 0{,}76$.
e) Im Mittel 24 von 100 Fahrten ohne Halt. Ob ein anderer Weg besser ist, hängt von dessen Ampeln und Länge ab; mit $76\,\%$ Anhaltewahrscheinlichkeit lohnt sich ein Vergleich.
Die Ampeln sind unabhängig, deshalb multipliziert man entlang der Pfade. Für genau eine rote Ampel gibt es drei Pfade, je nachdem welche Ampel rot ist. Antwort: Nur etwa jede vierte Fahrt verläuft ohne Halt.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 1{,}21\,\%$.

b) $\frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} = \frac{189}{248} \approx 76{,}2\,\%$.
c) $1 - \frac{189}{248} = \frac{59}{248} \approx 23{,}8\,\%$.
d) $2 \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{31} \approx 3{,}2\,\%$.
e) Eigentlich ist $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ die Wahrscheinlichkeit mit Zurücklegen. Ohne Zurücklegen ist sie $\frac{3}{248} \approx \frac{1}{83}$, also kleiner, weil nach einem Ass nur noch 3 Asse unter 31 Karten sind (Anteil $\frac{3}{31}$).
Für ein Ass und einen König gibt es zwei Pfade, Ass–König und König–Ass, mit derselben Wahrscheinlichkeit. Antwort: Zwei Asse erhält man nur mit etwa 1,2 %, mindestens ein Ass mit etwa 23,8 %.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
b) $\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$.
c) Pfade JMM, MJM, MMJ: $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
d) $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
e) Pfad MJJ: $\frac{1}{8}$.
Jede Geburt ist eine Stufe mit den Ästen J und M, beide mit $\frac{1}{2}$. Deshalb sind alle acht Pfade gleich wahrscheinlich. Antwort: Genau zwei Mädchen gibt es mit $\frac{3}{8}$, mindestens einen Jungen mit $\frac{7}{8}$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $P = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} = \frac{r^2}{100}$.
b) $r^2 = 36$, also $r = 6$.
c) $P = \frac{r}{10} \cdot \frac{r-1}{9} = \frac{r(r-1)}{90}$.
d) $\frac{r(r-1)}{90} = \frac{1}{3}$, also $r(r-1) = 30$, $r = 6$. Probe: $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.
Antwort: In beiden Fällen ergibt sich $r = 6$ rote Kugeln. Mit Zurücklegen steht in beiden Faktoren $\frac{r}{10}$, ohne Zurücklegen wird die zweite Stufe zu $\frac{r-1}{9}$, weil eine rote Kugel fehlt.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \approx 61{,}2\,\%$.
b) $1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} \approx 38{,}8\,\%$.
c) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{120}{343} \approx 35{,}0\,\%$.
d) Ab acht Personen: Es gibt nur sieben Wochentage, nach dem Schubfachprinzip müssen zwei Personen denselben Wochentag haben.
Antwort: Bei drei Personen haben mit etwa 39 % mindestens zwei denselben Wochentag. Das Schubfachprinzip zeigt, dass bei acht Personen eine Übereinstimmung sicher ist.