Lernzettel - Lineare Gleichungssysteme

Klasse: Klasse 8

Manchmal gibt es zwei Unbekannte und zwei Bedingungen. Dann brauchst du ein lineares Gleichungssystem.

Einstieg: Der Eisbecher und der Kakao

Am Tisch 1 im Eiscafé werden 2 Eis und 1 Kakao bestellt, die Rechnung beträgt *7{,}10\,€*. Am Tisch 2 sind es 1 Eis und 2 Kakao für *7{,}60\,€*. Wie viel kostet ein Eis, wie viel ein Kakao? Mit einer einzigen Rechnung geht das nicht, denn es sind zwei Preise gesucht. Du brauchst auch zwei Informationen, und die hast du: zwei Tische. Das ist die typische Lage für ein lineares Gleichungssystem: zwei Unbekannte und zwei Gleichungen. Das Ergebnis ist ein Zahlenpaar, nämlich *e=2{,}20\,€* und *k=2{,}70\,€*. In diesem Kapitel lernst du drei Verfahren, solche Systeme sicher zu lösen, und du erfährst, wann es keine oder unendlich viele Lösungen gibt.

Lineares Gleichungssystem

Definition: lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, zum Beispiel x und y. Gesucht sind Zahlenpaare $(x|y)$, die *beide* Gleichungen erfüllen. Jede Gleichung beschreibt eine Gerade, die Lösung ist der Schnittpunkt.

Definition: Lösungsmenge

Die **Lösungsmenge** L enthält alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen. Du schreibst sie zum Beispiel als $L = \{(3|7)\}$.

Wie viele Lösungen gibt es?



\n

Satz: Lösungsfälle

- **Genau eine Lösung:** Die Geraden schneiden sich (verschiedene Steigungen).

- **Keine Lösung:** Die Geraden sind parallel und verschieden. Beim Rechnen entsteht eine falsche Aussage wie $1 = -3$.
- **Unendlich viele Lösungen:** Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade. Es entsteht eine wahre Aussage wie $0 = 0$.

Einsetzungsverfahren

So gehst du vor: Einsetzungsverfahren

1. Löse eine Gleichung nach einer Unbekannten auf.
2. Setze den Term in die andere Gleichung ein.
3. Löse die entstandene Gleichung mit einer Unbekannten.
4. Berechne die zweite Unbekannte.
5. Mache die Probe in beiden Gleichungen.

Beispiel 1: Einsetzen

Löse $\text{I}\ y = 3x - 2$ **und** $\text{II}\ 2x + y = 13$**.**

I in II: $2x + (3x - 2) = 13$, also $5x = 15$ und $x = 3$.

$y = 3 \cdot 3 - 2 = 7$. Lösung: $(3|7)$.

Probe in II: $2 \cdot 3 + 7 = 13$. Stimmt.

Gleichsetzungsverfahren

Regel: Gleichsetzen

Sind beide Gleichungen nach y aufgelöst, setzt du die rechten Seiten gleich.

Beispiel 2: Gleichsetzen

Löse $y = 2x - 1$ **und** $y = x + 4$**.**

$2x - 1 = x + 4$, also $x = 5$.

$y = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. Lösung: $(5|9)$.

Additionsverfahren

So gehst du vor: Additionsverfahren

1. Multipliziere eine oder beide Gleichungen so, dass vor x oder y entgegengesetzte Zahlen stehen (die rechte Seite mitmultiplizieren).
2. Addiere (oder subtrahiere) die Gleichungen, sodass eine Unbekannte wegfällt.
3. Löse die entstandene Gleichung.

4. Setze das Ergebnis in eine Gleichung ein und berechne die zweite Unbekannte.
5. Mache die Probe.

Beispiel 3: Addieren

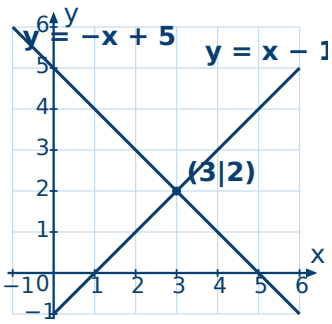
Löse $\mathrm{I}\ 2x + 3y = 1$ **und** $\mathrm{II}\ 3x + 2y = 4$**.**

x soll wegfallen: I mal 3 gibt $6x + 9y = 3$, II mal 2 gibt $6x + 4y = 8$.

Subtraktion: $5y = -5$, also $y = -1$.

Einsetzen in I: $2x - 3 = 1$, also $x = 2$. Lösung: $(2|-1)$. Probe in II: $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4$. Stimmt.

Grafisches Lösen



\n

Regel: Grafisch lösen

Zeichne beide Geraden in dasselbe Koordinatensystem und lies den Schnittpunkt ab. Das Verfahren ist anschaulich, aber ungenau, wenn der Schnittpunkt keine glatten Koordinaten hat. Mache deshalb am Ende immer die Probe durch Rechnung.

Beispiel 4: Besondere Fälle

Untersuche $y = 2x + 1$**,** $y = 2x - 3$ **und** $x + y = 4$**,** $2x + 2y = 8$**.**

Gleichsetzen: $2x + 1 = 2x - 3$ ergibt $1 = -3$. Falsch, also $L = \{\}$.

Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten. Es entsteht $0 = 0$: unendlich viele Lösungen.

Textaufgaben

So gehst du vor: Textaufgabe

1. Lege fest, was x und y bedeuten.

2. Übersetze jeden Satz der Aufgabe in eine Gleichung.
3. Löse das System mit einem Verfahren.
4. Prüfe, ob die Lösung zur Frage passt (keine negativen Anzahlen).
5. Schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 5: Kinokarten

2 Erwachsenen- und 3 Kinderkarten kosten 27 €, eine Erwachsenen- und zwei Kinderkarten 16 €.

$2E + 3K = 27$ und $E + 2K = 16$.

Aus der zweiten: $E = 16 - 2K$. Einsetzen: $32 - 4K + 3K = 27$, also $K = 5$ und $E = 6$.

Eine Erwachsenenkarte kostet 6 €, eine Kinderkarte 5 €.

Beispiel 6: Zahlenrätsel

Die Summe zweier Zahlen ist 25, ihre Differenz 7.

$x + y = 25$ und $x - y = 7$. Addition: $2x = 32$, also $x = 16$.

$y = 25 - 16 = 9$. Lösungsmenge: $L = \{(16|9)\}$.

Hinweis

Alle drei Verfahren formen das System so um, dass nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten bleibt. Dabei ändert sich die Lösungsmenge nicht. Deshalb kannst du die Verfahren zur gegenseitigen Kontrolle nutzen. Ist eine Gleichung schon nach einer Unbekannten aufgelöst, nimm Einsetzen oder Gleichsetzen. Stehen x und y links mit einfachen Faktoren, ist Addieren meist am schnellsten.

Welches Verfahren passt?

Alle drei Verfahren führen zum selben Ergebnis, aber je nach Aufgabe ist eines schneller. Ist eine Gleichung schon nach x oder y aufgelöst, nimmst du Einsetzen oder Gleichsetzen. Stehen x und y links mit einfachen Faktoren, ist Addieren meist am schnellsten. Entscheidend ist, dass du am Ende immer eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhältst.

Beispiel 7: Verfahren wählen

Löse $\mathrm{I}\ x = 2y - 1$ **und** $\mathrm{II}\ 3x - 2y = 5$**.**

I ist schon nach x aufgelöst, also setzt du ein: $3(2y - 1) - 2y = 5$. Ausmultiplizieren: $6y - 3 - 2y = 5$, also $4y = 8$ und $y = 2$. Dann $x = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Probe in II: $9 - 4 = 5$. Das Ergebnis ist $L = \{(3|2)\}$.

Textaufgaben richtig ansetzen

Bei Textaufgaben liegt die Hauptarbeit im Aufstellen. Lege zuerst fest, wofür x und y stehen, und schreibe das mit Einheit auf: „x ist der Preis eines Hefts in Euro.“ Dann übersetzt du jeden Satz in eine Gleichung. Typische Aufgabentypen sind Zahlenrätsel, Alters-, Preis-, Mischungs- und Bewegungsaufgaben. Bei Bewegungsaufgaben mit Strömung rechnest du mit $v + w$ und $v - w$.

Beispiel 8: Altersaufgabe

Anna ist heute dreimal so alt wie ihr Bruder Ben. In 6 Jahren ist sie nur noch doppelt so alt wie er. Wie alt sind beide?

$a = 3b$ und $a + 6 = 2(b + 6)$. Einsetzen: $3b + 6 = 2b + 12$, also $b = 6$ und $a = 18$. Probe: In 6 Jahren ist Anna 24 und Ben 12: $24 = 2 \cdot 12$.

Beispiel 9: Mischungsaufgabe

Ein Händler mischt Tee zu *8\,€* pro 100 g und Tee zu *12\,€* pro 100 g zu 10 Packungen à 100 g für *100\,€*. Wie viele Packungen von jeder Sorte?

$x + y = 10$ und $8x + 12y = 100$. Aus der ersten: $x = 10 - y$. Einsetzen: $80 - 8y + 12y = 100$, also $4y = 20$, $y = 5$ und $x = 5$. Je 5 Packungen von jeder Sorte.

Der Parameter entscheidet

Manchmal enthält ein System eine Zahl, die du wählen kannst, zum Beispiel a. Dann hängt die Zahl der Lösungen von dieser Zahl ab. Du setzt gleich oder addierst und prüfst, ob $0 = 0$ oder ein Widerspruch entsteht. Parallele Geraden haben gleiche Steigung und verschiedene Achsenabschnitte, identische Geraden haben beides gleich.

Beispiel 10: Lösungsfälle

Für welches a hat $y = 2x + 1$, $y = ax + 4$ keine Lösung?

Parallel sind die Geraden bei gleicher Steigung $a = 2$ und verschiedenen Achsenabschnitten ($1 \neq 4$). Dann ergibt Gleichsetzen $2x + 1 = 2x + 4$, also $1 = 4$: Es gibt keine Lösung. Für $a \neq 2$ gibt es genau einen Schnittpunkt.

Achtung: Drei Fehlerquellen

Erstens: Beim Subtrahieren zweier Gleichungen wechseln alle Vorzeichen der zweiten Gleichung. Zweitens: Beim Multiplizieren einer Gleichung wird die rechte Seite mitmultipliziert. Drittens: Ein Zahlenpaar ist erst dann eine Lösung, wenn es beide Gleichungen erfüllt.

Wusstest du?

Schon die Chinesen lösten vor etwa $2\,000$ Jahren Gleichungssysteme mit Zahlentafeln.

Das Verfahren, das du als Additionsverfahren kennst, wird heute nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß benannt. Computer lösen damit Systeme mit Millionen von Unbekannten, zum Beispiel bei der Wettervorhersage und beim Bau von Brücken.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten; die Lösung ist ein Zahlenpaar $(x|y)$.
- Jede Gleichung ist eine Gerade; die Lösung ist der Schnittpunkt beider Geraden.
- Einsetzungsverfahren: nach einer Unbekannten auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.
- Gleichsetzungsverfahren: beide Gleichungen nach y auflösen und die rechten Seiten gleichsetzen.
- Additionsverfahren: so multiplizieren, dass beim Addieren oder Subtrahieren eine Unbekannte wegfällt.
- Eine Lösung (Schnittpunkt), keine Lösung (parallel, Widerspruch $1 = -3$) oder unendlich viele Lösungen ($0 = 0$).
- Textaufgaben: Unbekannte festlegen, zwei Gleichungen aufstellen, lösen, Antwortsatz.
- Probe immer in beiden Gleichungen machen.

Achtung

Beim Subtrahieren das Minus bei allen Gliedern der zweiten Gleichung setzen. Beim Multiplizieren die rechte Seite mitmultiplizieren. Nicht nur x berechnen, auch y. Die Lösung ist ein Zahlenpaar $(x|y)$, keine einzelne Zahl. Probe in *beiden* Gleichungen machen.

Vertiefung: Das passende Verfahren wählen

Merke: Welches Verfahren wann?

Alle drei Rechenverfahren führen zur selben Lösung, aber nicht gleich schnell. Ist eine Gleichung bereits nach einer Variablen aufgelöst, etwa $y = 2x + 1$, ist das **Einsetzungsverfahren** am bequemsten. Sind beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst, nimmt man das **Gleichsetzungsverfahren**. Stehen die Variablen ordentlich untereinander und haben gleiche oder entgegengesetzte Koeffizienten, etwa $+3y$ und $-3y$, ist das **Additionsverfahren** am schnellsten. Das grafische Verfahren eignet sich vor allem, um die Lösungsfälle zu veranschaulichen.

So gehst du vor: Textaufgaben mit zwei Unbekannten

1. Lege die beiden Variablen fest und schreibe auf, was sie bedeuten, zum Beispiel E = Preis einer Erwachsenenkarte in Euro.

2. Suche im Text zwei voneinander unabhängige Informationen. Jede liefert eine Gleichung.
3. Ordne die Gleichungen so, dass gleiche Variablen untereinander stehen.
4. Löse das System mit dem passenden Verfahren.
5. Mache die Probe am Text, nicht nur an den Gleichungen, und schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel: Mischungsaufgabe

Ein Saftladen mischt Apfelsaft (2 € pro Liter) und Orangensaft (3 € pro Liter) zu 10 Litern einer Mischung für 2,40 € pro Liter. Wie viele Liter jeder Sorte braucht man?

Mit a Litern Apfelsaft und o Litern Orangensaft gilt für die Menge $a + o = 10$ und für den Preis $2a + 3o = 24$. Subtrahiert man das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten, bleibt $o = 4$. Also ist $a = 6$. Probe: $6 + 4 = 10$ und $12 + 12 = 24$. Man braucht 6 Liter Apfelsaft und 4 Liter Orangensaft.

Ottos Tipp

Schreibe die Gleichungen untereinander und nummeriere sie mit I und II. So behältst du den Überblick. Bei jeder Textaufgabe lohnt sich eine Zeile Definition: „x ist der Preis eines Heftes, y der Preis eines Stiftes.“