Lösungen - Lineare Gleichungssysteme

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $(3|7)$: I $3 \cdot 3 - 2 = 7$ wahr; II $6 + 7 = 13$ wahr. $(2|4)$: I $6 - 2 = 4$ wahr; II $4 + 4 = 8$ falsch. $(5|13)$: I $15 - 2 = 13$ wahr; II $10 + 13 = 23$ falsch.
b) Nur $(3|7)$ löst beide Gleichungen. Bei den anderen Paaren wird mindestens eine Gleichung falsch.
Ein Zahlenpaar ist nur dann Lösung eines Gleichungssystems, wenn es alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Die Paare $(2|4)$ und $(5|13)$ liegen zwar auf der Geraden I, aber nicht auf der Geraden II. Grafisch ist $(3|7)$ der Schnittpunkt beider Geraden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) I in II: $x + 2x = 12$, $x = 4$, $y = 8$. Probe: $4 + 8 = 12$ und $8 = 2 \cdot 4$. $L = \{(4|8)\}$.
b) I in II: $2(y + 3) + y = 15$, $3y + 6 = 15$, $y = 3$, $x = 6$. Probe: $12 + 3 = 15$. $L = \{(6|3)\}$.
c) I in II: $3x + 2(x - 1) = 13$, $5x - 2 = 13$, $x = 3$, $y = 2$. Probe: $9 + 4 = 13$. $L = \{(3|2)\}$.
Beim Einsetzungsverfahren ersetzt man in der zweiten Gleichung eine Variable durch den Term aus der ersten. So entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen. Die zweite Variable erhält man durch Einsetzen des Ergebnisses in die aufgelöste Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $2x - 1 = x + 4$, $x = 5$, $y = 9$. $L = \{(5|9)\}$.
b) $-x + 7 = 3x - 5$, $12 = 4x$, $x = 3$, $y = 4$. $L = \{(3|4)\}$.
c) $0{,}5x + 1 = -x + 4$, $1{,}5x = 3$, $x = 2$, $y = 2$. $L = \{(2|2)\}$.
Da beide Gleichungen nach y aufgelöst sind, müssen ihre rechten Seiten am Schnittpunkt gleich sein. Nach dem Lösen der entstehenden Gleichung setzt man x in eine der beiden Gleichungen ein. Probe zu b): $-3 + 7 = 4$ und $9 - 5 = 4$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) I + II: $2x = 14$, $x = 7$, $y = 3$. Probe: $7 - 3 = 4$.
b) I mal 3: $6x + 9y = 3$; II mal 2: $6x + 4y = 8$; Subtraktion: $5y = -5$, $y = -1$; in I: $2x - 3 = 1$, $x = 2$. Probe II: $6 - 2 = 4$.
c) I + II: $6x = 18$, $x = 3$; in I: $12 + 3y = 27$, $y = 5$. Probe II: $6 - 15 = -9$.
Ziel des Additionsverfahrens ist, dass beim Addieren oder Subtrahieren der Gleichungen eine Variable wegfällt. Bei a) und c) haben die y-Glieder schon entgegengesetzte Koeffizienten, bei b) muss man zuerst beide Gleichungen geschickt multiplizieren.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Der Schnittpunkt ist $S(2|3)$.
b) $x+1=-x+5$, $2x=4$, $x=2$, $y=3$.
c) Beim Ablesen entstehen Ungenauigkeiten. Die Probe in beiden Gleichungen zeigt, ob das Zahlenpaar wirklich stimmt: $2+1=3$ und $-2+5=3$.
Antwort: Das System hat die Lösung $L=\{(2|3)\}$. Grafisch ist das der Schnittpunkt der beiden Geraden; rechnerisch erhält man ihn durch Gleichsetzen der Funktionsterme.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Gleichsetzen: $2x+1=2x-3$ ergibt $1=-3$, falsch. Parallele Geraden: keine Lösung, $L=\{\}$.
b) II ist das Doppelte von I: $0=0$, wahr. Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade: unendlich viele Lösungen.
c) $3x=-x+8$, $x=2$, $y=6$: genau eine Lösung $(2|6)$.
Die Anzahl der Lösungen erkennt man an den Steigungen: Verschiedene Steigungen bedeuten genau einen Schnittpunkt. Gleiche Steigungen und verschiedene Achsenabschnitte bedeuten parallele Geraden ohne Schnittpunkt. Sind die Gleichungen Vielfache voneinander, sind die Geraden identisch.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $x+y=25$, $x-y=7$: $2x=32$, $x=16$, $y=9$.
b) $x+y=40$, $x=3y$: $4y=40$, $y=10$, $x=30$.
c) $2x+y=19$, $x-y=2$: $3x=21$, $x=7$, $y=5$. Probe: $14+5=19$.
Bei Zahlenrätseln übersetzt man jeden Satz in eine Gleichung. Wörter wie „Summe“ bedeuten Plus, „Differenz“ bedeutet Minus und „dreimal so groß“ bedeutet einen Faktor 3. Probe zu a): $16+9=25$ und $16-9=7$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $2E+3K=27$ und $E+2K=16$.
b) Aus II: $E=16-2K$; in I: $32-4K+3K=27$, also $K=5$ und $E=6$.
c) *2\cdot6+5=17\,€*.
d) Einzeln zahlt die Familie *12+20=32\,€*. Der Familienpreis von *35\,€* wäre teurer, er lohnt sich nicht.
Antwort: Eine Erwachsenenkarte kostet 6 €, eine Kinderkarte 5 €; Familie Cesar zahlt 17 €. Probe: $12+15=27$ und $6+10=16$. Der angebotene Familienpreis wäre 3 € teurer als die Einzelkarten.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $3k+2s=8{,}50$ und $2k+4s=11$.
b) I mal 2: $6k+4s=17$; minus II: $4k=6$, $k=1{,}50$; $s=\frac{8{,}5-4{,}5}{2}=2{,}00$ (Euro).

c) *5\cdot1{,}5+5\cdot2=17{,}50\,€*.
d) *12\cdot1{,}5+10\cdot2=38\,€*. Ja, es bleiben *22\,€*.
Antwort: Ein Kuchenstück kostet 1,50 €, ein Glas Saft 2,00 €. Probe: $4{,}50 + 4{,}00 = 8{,}50$ und $3{,}00 + 8{,}00 = 11{,}00$. Die Klasse kommt mit ihrem Geld aus und behält 22 € übrig.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h + k = 20$ und $2h + 4k = 54$.
b) II minus 2 mal I: $2k = 14$, $k = 7$, $h = 13$.
c) $13 + 7 = 20$ Tiere; $26 + 28 = 54$ Beine.
d) $26 + 36 = 62$ Beine.
Antwort: Im Stall sind 13 Hühner und 7 Kaninchen. Die erste Gleichung zählt die Köpfe, die zweite die Beine. Dieses Rätsel ist schon über 1500 Jahre alt und stammt aus China.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $v = 4t$ und $v + 12 = 2(t + 12)$.
b) $4t + 12 = 2t + 24$, $t = 6$, $v = 24$.
c) Jonas war 18 Jahre alt, als Amira geboren wurde $(24 - 6)$.
d) In x Jahren gilt $24 + x = 3(6 + x)$, also $24 + x = 18 + 3x$ und $x = 3$. In 3 Jahren ist Jonas 27 und Amira 9 Jahre alt.
Wichtig ist, dass in 12 Jahren beide Personen 12 Jahre älter sind, deshalb steht auf beiden Seiten $+12$. Antwort: Amira ist heute 6, ihr Vater 24 Jahre alt; in 3 Jahren ist er dreimal so alt wie sie.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $x + y = 30$ und $2x + 0{,}5y = 24$.
b) II minus $0{,}5$ mal I: $1{,}5x = 9$, $x = 6$, $y = 24$.
c) Zwei-Euro-Stücke: *12\,€*; Fünfzig-Cent-Stücke: *12\,€*.
d) $1{,}5x = 15$, $x = 10$, also 10 Zwei-Euro-Stücke und 20 Fünfzig-Cent-Stücke.
Die erste Gleichung zählt die Münzen, die zweite ihren Wert in Euro. Probe: $6 + 24 = 30$ Münzen und *12+12=24\,€*. Antwort: Mia hat 6 Zwei-Euro-Stücke und 24 Fünfzig-Cent-Stücke.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $2l + 2b = 36$ und $l = b + 4$.
b) $2(b + 4) + 2b = 36$, $4b = 28$, $b = 7$, $l = 11$ (in m).
c) $A = 11 \cdot 7 = 77\,\mathrm{m}^2$.
d) $4b + 8 = 44$, $b = 9$, $l = 13$. Länge und Breite wachsen um je 2 m.
Antwort: Das Beet ist 11 m lang und 7 m breit und hat eine Fläche von 77 m². Probe: $2 \cdot 11 + 2 \cdot 7 = 36$. Wächst der Umfang um 8 m, so wächst jede Seite um 2 m, weil jede Seite zweimal im Umfang vorkommt.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $2E + 2K = 58$ und $E + 3K = 47$.
b) I geteilt durch 2: $E + K = 29$; minus II: $-2K = -18$, $K = 9$, $E = 20$.
c) *25\cdot9+2\cdot20=265\,€*.
d) *265\cdot0{,}9=238{,}50\,€*.
Antwort: Eine Erwachsenenkarte kostet 20 €, eine Kinderkarte 9 €. Probe: $40 + 18 = 58$ und $20 + 27 = 47$. Die Schulklasse zahlt mit Rabatt 238,50 €.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $2e + k = 7{,}10$ und $e + 2k = 7{,}60$.
b) I mal 2: $4e + 2k = 14{,}20$; minus II: $3e = 6{,}60$, $e = 2{,}20$; $k = 7{,}10 - 4{,}40 = 2{,}70$.
c) *3\cdot2{,}20+3\cdot2{,}70=14{,}70\,€*.
d) *4\cdot2{,}20+2\cdot2{,}70=8{,}80+5{,}40=14{,}20\,€*. Die Rechnung stimmt nicht, es wären *14{,}20\,€*.
e) *2{,}70-2{,}20=0{,}50\,€*.
Antwort: Ein Eis kostet 2,20 €, ein Kakao 2,70 €. Probe: $4{,}40 + 2{,}70 = 7{,}10$ und $2{,}20 + 5{,}40 = 7{,}60$. Tisch 3 zahlt 14,70 €, und bei Tisch 4 wurden 30 Cent zu viel berechnet.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Abwärts $24 : 2 = 12$ km/h; aufwärts $24 : 3 = 8$ km/h.
b) $v + w = 12$ und $v - w = 8$.
c) Addition: $2v = 20$, $v = 10$ km/h; $w = 2$ km/h.
d) $30 : 8 = 3{,}75$ h $= 3$ h 45 min.
e) Abwärts $30 : 12 = 2{,}5$ h, aufwärts $3{,}75$ h; zusammen $6{,}25$ h.
Flussabwärts addieren sich Eigengeschwindigkeit und Strömung, flussaufwärts wird die Strömung abgezogen. Antwort: Das Boot fährt im ruhigen Wasser 10 km/h, die Strömung beträgt 2 km/h, die Rundfahrt dauert 6 Stunden und 15 Minuten.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $p + r = 400$ und $30p + 20r = 9800$.
b) II minus 20 mal I: $10p = 1800$, $p = 180$, $r = 220$.
c) Parkett $\frac{180}{200} = 90\,\%$; Rang $\frac{220}{250} = 88\,\%$.
d) *200\cdot30+250\cdot20=11\,000\,€*.
e) Parkett voll: *200\cdot30=6000\,€*. Rest: *10000-6000=4000\,€*, also $4000 : 20 = 200$ Rangkarten, das sind $80\,\%$ der Rangplätze.
Antwort: Es wurden 180 Parkett- und 220 Rangkarten verkauft. Probe: $180 + 220 = 400$ und $5400 + 4400 = 9800$. Für 10 000 € Einnahmen müssten bei vollem Parkett 200 Rangkarten verkauft werden.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $m + r = 5$ und $12m + 6r = 45$.
b) II minus 6 mal I: $6m = 15$, $m = 2{,}5$, $r = 2{,}5$ kg.
c) *5\cdot9=45\,€*.
d) $m + r = 5$, $12m + 6r = 50$: $6m = 20$, $m = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ kg, $r \approx 1{,}67$ kg.
Die erste Gleichung beschreibt die Gesamtmenge, die zweite den Gesamtpreis *5\cdot9=45\,€*. Antwort: Für den Preis von 9 € pro kg mischt man je 2,5 kg Mandeln und Rosinen; für 10 € pro kg braucht man mehr Mandeln.

Lösung zu Aufgabe 19

a) II ist das Doppelte von I, wenn $c = 10$: unendlich viele Lösungen. Für $c \neq 10$ ergibt sich ein Widerspruch (z. B. $c = 12$: $2 \cdot 5 = 12$), also keine Lösung.
b) Gleichsetzen: $3x + 1 = ax - 2$, also $3 = (a - 3)x$. Für $a \neq 3$ genau eine Lösung $x = \frac{3}{a-3}$; für $a = 3$ ist $3 = 0$ falsch, also keine Lösung (parallele Geraden).
c) $a = 2$: $x = \frac{3}{-1} = -3$, $y = 3 \cdot (-3) + 1 = -8$. Probe: $2 \cdot (-3) - 2 = -8$.
Bei Parameteraufgaben untersucht man, wann ein Widerspruch oder eine immer wahre Aussage entsteht. Antwort: Bei a) gibt es für $c = 10$ unendlich viele Lösungen, sonst keine. Bei b) gibt es für jedes $a \neq 3$ genau eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $a + b = 11$ und $10b + a = 10a + b + 27$, also $b - a = 3$.
b) Addiere: $2b = 14$, $b = 7$, $a = 4$.
c) Die Zahl ist 47, vertauscht 74.
d) $4 + 7 = 11$ und $74 - 47 = 27$. Stimmt.
Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer a und der Einerziffer b hat den Wert $10a + b$. Antwort: Die gesuchte Zahl ist 47.