# Lernzettel - Lineare Funktionen

Klasse: Klasse 8

Lineare Funktionen beschreiben gleichmäßige Zusammenhänge wie Taxipreise oder Sparpläne. Ihr Graph ist immer eine Gerade.

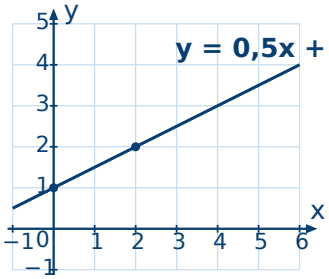
**Einstieg: Taxi oder Bus?**

Leonie will in Köln vom Bahnhof zum Stadion. Das Taxi berechnet *3{,}90\,€* Grundgebühr und *2{,}10\,€* pro Kilometer. Bei $5$ km sind das *14{,}40\,€*, bei $10$ km schon *24{,}90\,€*. Die Kosten wachsen gleichmäßig: Jeder Kilometer kostet gleich viel. Solche gleichmäßigen Zusammenhänge heißen linear, und ihre Graphen sind Geraden. Mit der Funktionsgleichung $K(x) = 2{,}1x + 3{,}9$ kannst du jede Fahrt vorher ausrechnen und mit anderen Angeboten vergleichen. In diesem Kapitel lernst du, solche Funktionen zu erkennen, zu zeichnen und aus Situationen aufzustellen. Dabei hilft dir immer die Frage: Was ist der Startwert, und was ändert sich pro Schritt?

## Die lineare Funktion

**Definition: lineare Funktion**

Eine **lineare Funktion** ordnet jeder Zahl $x$ genau eine Zahl $y$ zu: $y = mx + b$ (oder $f(x) = mx + b$). Ihr Graph ist eine **Gerade**.




\n

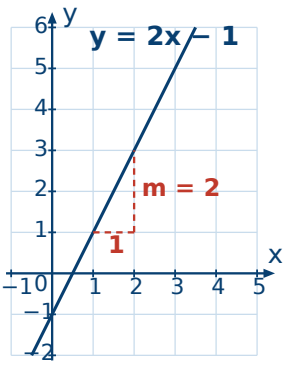
**Definition: Steigung und y-Achsenabschnitt**

- $m$ heißt **Steigung**. Sie sagt, um wie viel $y$ wächst, wenn $x$ um 1 größer wird.
- $b$ heißt **y-Achsenabschnitt**. Die Gerade schneidet die y-Achse in $(0 \mid b)$.

## Die Steigung verstehen

**Merke: Steigung**

Für $m > 0$ steigt die Gerade von links nach rechts, für $m$ fällt sie, für $m = 0$ verläuft sie waagerecht ($y = b$). Je größer $|m|$, desto steiler die Gerade.

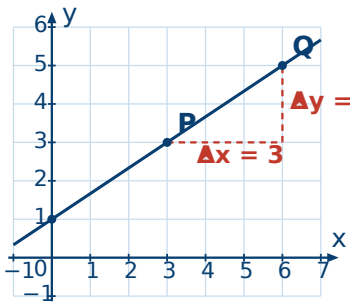



\n

**So gehst du vor: Graph zeichnen**

1. Zeichne ein Koordinatensystem mit passender Einteilung.
2. Markiere den y-Achsenabschnitt $(0|b)$.
3. Trage von diesem Punkt aus das Steigungsdreieck ab: eine Einheit nach rechts, $m$ Einheiten nach oben (bei negativem $m$ nach unten).
4. Verbinde die Punkte mit dem Lineal und verlängere die Gerade über beide Punkte hinaus.
5. Kontrolliere mit einem dritten Punkt aus einer Wertetabelle.

## Steigung aus zwei Punkten




\n

**Satz: Steigung aus zwei Punkten**

Für $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ gilt $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Im Zähler und im Nenner muss die Reihenfolge der Punkte gleich sein.

## Funktionsgleichung aufstellen

**So gehst du vor: Gleichung aus zwei Punkten**

1. Berechne $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Setze $m$ und die Koordinaten eines Punktes in $y = mx + b$ ein.
3. Löse nach $b$ auf: $b = y_P - m \cdot x_P$.
4. Schreibe die Gleichung auf und mache die Probe mit dem zweiten Punkt.

**Beispiel 1: Gleichung aus zwei Punkten**

**Gesucht ist die Gerade durch $A(1|3)$ und $B(4|9)$.**

$m = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$.

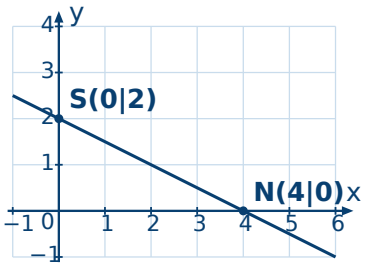
Punkt $A$ einsetzen: $3 = 2 \cdot 1 + b$, also $b = 1$. Ergebnis: $y = 2x + 1$.

Probe mit $B$: $2 \cdot 4 + 1 = 9$. Passt.

## Nullstelle

**Definition: Nullstelle**

Die **Nullstelle** ist die Stelle, an der der Graph die x-Achse schneidet, also $y = 0$. Aus $mx + b = 0$ folgt $x = -\frac{b}{m}$ (für $m \neq 0$).




\n

**Beispiel 2: Nullstelle**

**Bestimme die Achsenschnittpunkte von $y = -0{,}5x + 4$.**

$-0{,}5x + 4 = 0$, also $0{,}5x = 4$ und $x = 8$.

Der Graph schneidet die x-Achse in $(8|0)$ und die y-Achse in $(0|4)$.

## Punktprobe

**Regel: Punktprobe**

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf der Geraden liegt, setzt du seine Koordinaten in die Gleichung ein. Entsteht eine wahre Aussage, liegt der Punkt auf dem Graphen.

**Beispiel 3: Punktprobe**

**Liegen $P(3|-1)$ und $Q(2|2)$ auf $y=-2x+5$?**

$P$: $-2\cdot 3+5=-1$. Das stimmt mit dem y-Wert überein, $P$ liegt auf der Geraden.

$Q$: $-2\cdot 2+5=1\neq 2$. $Q$ liegt nicht auf der Geraden.

## Proportional oder nur linear?

Eine proportionale Funktion ist ein Sonderfall der linearen Funktion mit $b=0$: $y=mx$. Ihr Graph geht durch den Ursprung, und das Doppelte von $x$ ergibt das Doppelte von $y$. Bei $y=mx+b$ mit $b\neq 0$ gilt das nicht. Fünf Liter Benzin kosten das Fünffache von einem Liter, aber das Taxi für $10$ km kostet nicht das Doppelte wie für $5$ km, weil die Grundgebühr nur einmal anfällt.

**Beispiel 7: Proportional prüfen**

**Entscheide, ob $y=0{,}8x$, $y=0{,}8x+2$ und $y=\frac{8}{x}$ proportional, nur linear oder keines von beiden sind.**

$y=0{,}8x$ ist proportional ($b=0$). $y=0{,}8x+2$ ist linear, aber nicht proportional, denn bei $x=0$ ist $y=2$. $y=\frac{8}{x}$ ist weder proportional noch linear: Der Graph ist keine Gerade, es handelt sich um eine antiproportionale Zuordnung.

## Steigung als Änderungsrate

Die Steigung $m$ beschreibt, wie stark sich $y$ ändert, wenn $x$ um eins wächst. Im Alltag heißt das: Preis pro Kilometer, Geschwindigkeit, Temperaturabfall pro Höhenmeter, Verbrauch pro Tag. Eine negative Steigung bedeutet, dass etwas abnimmt, zum Beispiel ein Tankinhalt. Eine Steigung $m=0$ bedeutet: nichts ändert sich, der Graph ist waagerecht.

**So gehst du vor: Funktion aus einem Text aufstellen**

1. Suche den Startwert: Das ist $b$ (Wert bei $x=0$).
2. Suche die Änderung pro Einheit: Das ist $m$ (negativ bei Abnahme).
3. Schreibe $y=mx+b$ auf und beschrifte die Größen mit Einheiten.
4. Prüfe mit einem Zahlenbeispiel aus dem Text.

**Beispiel 8: Badewanne**

**In einer Badewanne stehen $120$ Liter Wasser. Der Abfluss entleert sie mit $15$ Litern pro Minute. Wann ist die Wanne leer?**

Startwert $b = 120$, Änderung $m = -15$: $V(t) = 120 - 15t$. Leer, wenn $V = 0$: $15t = 120$, also $t = 8$ Minuten. Nach $3$ Minuten sind noch $120 - 45 = 75$ Liter drin.

## Mehrere Geraden vergleichen

Wenn zwei Angebote verglichen werden, zeichnest du beide Geraden in ein Koordinatensystem. Der Schnittpunkt zeigt, ab wann ein Angebot günstiger ist. Du kannst ihn aber auch rechnen, indem du die Terme gleichsetzt. Danach entscheidest du mit einem Probewert: Welche Gerade liegt links vom Schnittpunkt unten, welche rechts?

### Beispiel 9: Zwei Fitnessstudios

**Studio A kostet *20\,€* Anmeldung und *25\,€* im Monat. Studio B kostet keine Anmeldung, aber *35\,€* im Monat. Ab wann ist A günstiger?**

$K_A = 20 + 25x$ und $K_B = 35x$. Gleichsetzen: $20 + 25x = 35x$, also $x = 2$ Monate. Nach $2$ Monaten kosten beide *70\,€*. Wer länger bleibt, zahlt bei A weniger: Nach $6$ Monaten sind es *170\,€* gegen *210\,€*.

### Achtung: Drei Fehlerquellen

Erstens: Bei einer fallenden Gerade ist $m$ negativ, das Vorzeichen gehört zum $m$. Zweitens: Beim Einsetzen mit negativem $x$ setzt du Klammern: $-2 \cdot (-1)$. Drittens: Beim Gleichsetzen berechnest du zuerst $x$, dann $y$, sonst ist der Schnittpunkt nur halb gefunden.

### Wusstest du?

Das Wort „Funktion“ führte der Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz im Jahr 1673 ein. Lineare Funktionen sind die einfachste Art von Funktionen, aber sie stecken in vielen Rechenmodellen: von Handytarifen über das Fahrtenbuch bis zu Wettervorhersagen, bei denen kleine Veränderungen als Gerade genähert werden.

### Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Lineare Funktion: $y = mx + b$; der Graph ist eine Gerade.
- $m$ ist die Steigung (Änderung von $y$ pro Einheit $x$), $b$ der y-Achsenabschnitt $(0|b)$.
- Steigung aus zwei Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; danach $b$ durch Einsetzen eines Punktes.
- Nullstelle: $mx + b = 0$, also $x = -\frac{b}{m}$ für $m \neq 0$.
- Punktprobe: Koordinaten einsetzen; eine wahre Aussage bedeutet, dass der Punkt auf der Geraden liegt.
- Parallele Geraden haben dieselbe Steigung; den Schnittpunkt findest du durch Gleichsetzen.
- Im Alltag ist $b$ die Grundgebühr oder der Startwert, $m$ der Preis pro Einheit oder

die Änderungsrate.
- Eine lineare Tabelle erkennst du an gleichen Änderungen von $y$ bei gleichen Schritten von $x$.

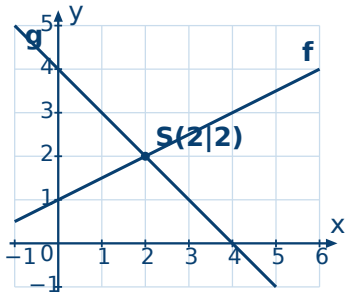
**Achtung**

Beim Steigungsdreieck sind Zähler und Nenner nicht vertauschbar: $m = \Delta y : \Delta x$. Bei $y = 2x - 3$ ist $b = -3$, nicht 3. In einem Punkt steht der x-Wert zuerst. Für die Nullstelle setzt du $y = 0$; $x = 0$ liefert den y-Achsenabschnitt.

## Parallele Geraden und Schnittpunkte

**Regel: Parallel und Schnittpunkt**

- Zwei Geraden sind **parallel**, wenn sie dieselbe Steigung, aber verschiedene y-Achsenabschnitte haben.
- Den **Schnittpunkt** findest du, indem du die Funktionsterme gleichsetzt.




\n

**Beispiel 4: Schnittpunkt**

**Bestimme den Schnittpunkt von $y = x + 1$ und $y = -2x + 7$.**

Gleichsetzen: $x + 1 = -2x + 7$, also $3x = 6$ und $x = 2$.

Dann $y = 3$. Der Schnittpunkt ist $S(2|3)$.

## Lineare Funktionen im Alltag

**Hinweis**

Viele Zusammenhänge sind linear: Taxitarif, Handytarif, Kerze, Sparplan. Die Grundgebühr entspricht dem y-Achsenabschnitt $b$, der Preis pro Einheit der Steigung $m$.

### Beispiel 5: Fahrradverleih

**Ein Verleih verlangt 4 € Grundgebühr und 3 € pro Stunde. Wie viel kosten 5 Stunden, wie lange fährst du für 28 €?**

Funktionsgleichung: $K(t) = 3t + 4$.

$K(5) = 3 \cdot 5 + 4 = 19$ €.

$3t + 4 = 28$ ergibt $3t = 24$, also $t = 8$. Du kannst 8 Stunden fahren.

### Beispiel 6: Parallele Gerade

**Welche Gerade parallel zu $y = 3x - 1$ geht durch $P(2|5)$?**

Die Steigung bleibt $m = 3$.

$5 = 3 \cdot 2 + b$ ergibt $b = -1$... Das wäre dieselbe Gerade, also prüfe: $3 \cdot 2 - 1 = 5$. $P$ liegt bereits auf der Geraden.

Für $P(2|8)$ wäre $8 = 6 + b$, also $b = 2$ und $y = 3x + 2$.

## Vertiefung: Lineare Funktionen im Sachzusammenhang

### So gehst du vor: Eine Sachaufgabe mit linearer Funktion

1. Lege fest, welche Größe $x$ und welche Größe $y$ ist, und notiere die Einheiten, zum Beispiel $x$ in Stunden und $y$ in Euro.
2. Suche den Startwert, also den Wert bei $x = 0$. Das ist der Achsenabschnitt $b$.
3. Suche die gleichmäßige Änderung pro Einheit von $x$. Das ist die Steigung $m$; bei Abnahme ist sie negativ.
4. Stelle die Gleichung $y = mx + b$ auf und kontrolliere sie mit einem bekannten Wertepaar.
5. Beantworte die Frage: Einsetzen für $x$ liefert $y$; bei gegebenem $y$ löst du eine Gleichung nach $x$ auf.
6. Überlege, für welche $x$-Werte das Modell sinnvoll ist, etwa nur für positive Zeiten.

### Beispiel: Wasser im Planschbecken

**In einem Planschbecken stehen 60 Liter Wasser. Ein Schlauch füllt pro Minute 15 Liter nach. Wann sind 600 Liter im Becken?**

Der Startwert ist $b = 60$, die Änderung pro Minute ist $m = 15$. Die Funktion lautet $V(t) = 15t + 60$. Für 600 Liter gilt $15t + 60 = 600$, also $15t = 540$ und $t = 36$. Nach 36 Minuten sind 600 Liter im Becken. Kontrolle: $15 \cdot 36 + 60 = 600$. Das Modell gilt nur, solange das Becken nicht überläuft.

### Achtung: Steigung richtig berechnen

Bei der Steigung aus zwei Punkten muss man im Zähler und im Nenner dieselbe Reihenfolge der Punkte verwenden: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Wer oben $y_2 - y_1$ und unten $x_1 - x_2$ rechnet, erhält das falsche Vorzeichen. Kontrolliere am Graphen: Steigt die Gerade von links nach rechts, muss $m$ positiv sein.

**Hinweis: Steigung und Steigungsdreieck**

Die Steigung gibt an, um wie viel der Funktionswert wächst, wenn $x$ um 1 zunimmt. Ein Steigungsdreieck darf beliebig groß sein: Bei $m = \frac{2}{3}$ kann man 3 nach rechts und 2 nach oben oder 6 nach rechts und 4 nach oben gehen. Größere Dreiecke ergeben genauere Zeichnungen.

**Ottos Tipp**

Zeichne immer eine kleine Skizze. Geht dein Graph nach oben, muss $m$ positiv sein. So findest du Vorzeichenfehler sofort. Setze am Ende beide Ausgangspunkte in deine Gleichung ein.