Lösungen - Lineare Funktionen

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) f: $2 \cdot (-2) - 3 = -7$, -3, -1, 5. g: $-0{,}5 \cdot (-2) + 4 = 5$, 4, $3{,}5$, 2.
b) f steigt ($m = 2 > 0$), g fällt ($m = -0{,}5$). Man sieht es an den Werten: f wird größer, g kleiner.
Die Funktionswerte erhält man durch Einsetzen der x-Werte; negative Zahlen setzt man in Klammern. Ob eine lineare Funktion steigt oder fällt, entscheidet allein das Vorzeichen der Steigung m, nicht der Achsenabschnitt.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $m = 3$, $b = 2$; $S_y(0|2)$.
b) $m = -1$, $b = 5$; $S_y(0|5)$.
c) $m = 0{,}5$, $b = -4$; $S_y(0|-4)$.
d) $m = -2$, $b = 0$; $S_y(0|0)$: die Gerade geht durch den Ursprung.
In der Normalform $y = mx + b$ steht die Steigung als Faktor vor x und der Achsenabschnitt als einzelne Zahl. Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat immer die Form $(0|b)$, denn für $x = 0$ bleibt nur b übrig. Fehlt b, geht die Gerade durch den Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Start $(0|-1)$, dann 1 nach rechts und 2 nach oben: $(1|1)$, $(2|3)$.
b) Start $(0|3)$, dann 2 nach rechts und 1 nach unten: $(2|2)$, $(4|1)$.
c) Start $(0|0)$, 1 nach rechts und 1 nach oben: $(1|1)$, $(2|2)$. Die Gerade halbiert den ersten Quadranten.
Beim Zeichnen beginnt man immer im Punkt $(0|b)$. Eine Steigung als Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bedeutet: Δx Schritte nach rechts und Δy Schritte nach oben, bei negativem Δy nach unten. Mehrere Steigungsdreiecke hintereinander machen die Zeichnung genauer.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $m = \frac{9-3}{4-1} = 2$; $3 = 2 \cdot 1 + b$, $b = 1$: $y = 2x + 1$. Probe: $2 \cdot 4 + 1 = 9$.
b) $m = \frac{6+3}{2+1} = 3$; $6 = 3 \cdot 2 + b$, $b = 0$: $y = 3x$. Probe: $3 \cdot (-1) = -3$.
c) $m = \frac{1-5}{4-0} = -1$; $b = 5$: $y = -x + 5$. Probe: $-4 + 5 = 1$.
d) $m = \frac{6-4}{6-2} = 0{,}5$; $4 = 0{,}5 \cdot 2 + b$, $b = 3$: $y = 0{,}5x + 3$. Probe: $3 + 3 = 6$.
Das Vorgehen ist immer gleich: Steigung aus der Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte, dann einen Punkt einsetzen und nach b auflösen. Die Probe mit dem zweiten Punkt zeigt, ob die Gleichung stimmt.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $2x = 6$, $x = 3$: $N(3|0)$.
b) $0{,}5x = 4$, $x = 8$: $N(8|0)$.
c) $4x = -2$, $x = -0{,}5$: $N(-0{,}5|0)$.
d) Die Gerade ist waagerecht ($m = 0$) und hat keine Nullstelle.
Die Nullstelle ist der x-Wert, bei dem der Funktionswert null ist. Man setzt deshalb $mx + b = 0$ und löst nach x auf. Eine waagerechte Gerade $y = c$ mit $c \neq 0$ schneidet die x-Achse nie.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $-2 \cdot 3 + 5 = -1$: wahr, P liegt auf der Geraden.
b) $-2 \cdot 2 + 5 = 1 \neq 2$: Q liegt nicht darauf.
c) $-2 \cdot (-1) + 5 = 7$: wahr, R liegt darauf.
d) $-2a + 5 = 1$, also $a = 2$.
Bei der Punktprobe setzt man den x-Wert ein und vergleicht das Ergebnis mit dem y-Wert des Punktes. Stimmen beide überein, liegt der Punkt auf der Geraden. Bei d) wird der y-Wert vorgegeben und die Gleichung nach a gelöst.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Ja: gleiche Steigung $m = 2$, verschiedene Achsenabschnitte ($3 \neq -1$).
b) $x + 1 = -2x + 7$, also $3x = 6$, $x = 2$ und $y = 3$: $S(2|3)$.
c) $m = 3$; $8 = 3 \cdot 2 + b$, $b = 2$: $y = 3x + 2$.
Parallele Geraden haben dieselbe Steigung, aber verschiedene Achsenabschnitte. Den Schnittpunkt zweier Geraden findet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme; den y-Wert erhält man durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $K(x) = 2{,}1x + 3{,}9$.
b) *K(5)=10{,}5+3{,}9=14{,}40\,€*; *K(10)=21+3{,}9=24{,}90\,€*.
c) $2{,}1x + 3{,}9 = 30$, also $x = \frac{26{,}1}{2{,}1} \approx 12{,}4$ km.
d) $m = 2{,}10$ ist der Preis pro Kilometer, $b = 3{,}90$ die Grundgebühr (Preis bei 0 km).
Antwort: Eine 10-km-Fahrt kostet 24,90 €, für 30 € kommt man gut 12 km weit. Die Grundgebühr ist der Achsenabschnitt, weil sie auch bei 0 km fällig ist, der Kilometerpreis ist die Steigung.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $K_A(x) = 5 + 0{,}04x$, $K_B(x) = 0{,}10x$.
b) $5 + 0{,}04x = 0{,}10x$, also $5 = 0{,}06x$ und $x = 83{,}3$ Minuten.
c) 60 min: A *7{,}40\,€*, B *6{,}00\,€*: B ist günstiger. 120 min: A *9{,}80\,€*, B *12{,}00\,€*: A ist günstiger.

d) Wer weniger als etwa 83 Minuten im Monat telefoniert, fährt mit B besser; Vieltelefonierer wählen A.
Antwort: Bei etwa 83 Minuten kosten beide Tarife gleich viel, nämlich rund 8,33 €. Darunter ist B günstiger, darüber A. Grafisch ist das der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h(t) = 24 - 2t$.
b) $24 - 10 = 14$ cm.
c) $24 - 2t = 10$, $t = 7$ Stunden.
d) $24 - 2t = 0$, $t = 12$ Stunden: Dann ist die Kerze abgebrannt. Sinnvoll ist $0 \le t \le 12$.
Die Steigung ist negativ, weil die Kerze kürzer wird; der Achsenabschnitt ist die Anfangslänge. Antwort: Nach 5 Stunden ist die Kerze 14 cm hoch, nach 7 Stunden 10 cm, nach 12 Stunden ist sie abgebrannt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $L(w) = 40 + 8w$, $T(w) = 12w$.
b) $40 + 8w = 280$, also $w = 30$ Wochen.
c) $40 + 8w = 12w$, $w = 10$ Wochen, jeweils $120\,€$.
d) Lena $280\,€$, Tim $360\,€$: Tim hat mehr.
Antwort: Lena kann sich das Fahrrad nach 30 Wochen kaufen. Tim holt seinen Rückstand auf, weil er pro Woche 4 € mehr spart; nach 10 Wochen haben beide 120 €, danach liegt Tim vorn.

Lösung zu Aufgabe 12

a) 32, $1{,}8 \cdot 20 + 32 = 68{,}0$, $1{,}8 \cdot 37 + 32 = 98{,}6$ Grad Fahrenheit.
b) $1{,}8C + 32 = 95$, $C = \frac{63}{1{,}8} = 35\,^\circ$C.
c) $1{,}8C = -32$, $C \approx -17{,}8\,^\circ$C.
d) $1{,}8C + 32 = C$, also $0{,}8C = -32$ und $C = -40$: bei -40° stimmen beide Skalen überein.
Die Umrechnung ist eine lineare Funktion mit der Steigung 1,8 und dem Achsenabschnitt 32. Antwort: $37\,^\circ$C entsprechen 98,6 °F, $95\,^\circ$F entsprechen $35\,^\circ$C, und bei -40 Grad zeigen beide Skalen dieselbe Zahl.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $m = 0{,}06$.
b) $45 : 0{,}06 = 750$ cm, also $7{,}5$ m.
c) Nein, 6 m reichen nicht. Steigung: $\frac{45}{600} = 7{,}5\,\%$, das ist zu steil.
d) $h(x) = 0{,}06x$.
Eine Steigung in Prozent gibt an, wie viele Zentimeter Höhe auf 100 cm waagerechte Länge kommen. Antwort: Für 45 cm Höhe braucht die Rampe mindestens 7,5 m Länge;

6 m reichen nicht, weil die Rampe dann 7,5 % steil wäre.

Lösung zu Aufgabe 14

a) T1 linear (immer $+3$), T2 nicht ($+1$, $+2$, $+4$), T3 linear (immer -2).
b) T1: $y = 3x + 4$; T3: $y = -2x + 10$.
c) Die Änderungen $+1, +2, +4$ sind nicht gleich: Die Punkte liegen nicht auf einer Geraden (Verdopplung ist exponentiell).
d) T3: Die y-Werte werden kleiner, $m = -2$.
Eine Tabelle mit gleichen Abständen der x-Werte gehört genau dann zu einer linearen Funktion, wenn die y-Werte sich immer um denselben Betrag ändern. Dieser Betrag ist die Steigung, der Wert bei $x = 0$ der Achsenabschnitt.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $K_A(x) = 3x + 4$, $K_B(x) = 5x$, $K_C(x) = 12$.
b) A: $7; 10; 13; 19$. B: $5; 10; 15; 25$. C: immer 12 (in Euro).
c) A=B: $3x + 4 = 5x$, $x = 2$. B=C: $5x = 12$, $x = 2{,}4$. A=C: $3x + 4 = 12$, $x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.
d) Bis 2 Stunden ist B am günstigsten, von 2 bis $\frac{8}{3}$ Stunden A, danach C.
e) A: *3\cdot2{,}5+4=11{,}50\,€*; B: *12{,}50\,€*; C: *12\,€*. A ist am günstigsten mit *11{,}50\,€*.
Antwort: Für 2,5 Stunden ist Verleiher A mit 11,50 € am günstigsten. Die Schnittstellen der Geraden teilen die Zeitachse in Bereiche, in denen jeweils ein anderer Verleiher am billigsten ist.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $s_T = 4t$; $s_L = 6(t - 0{,}5) = 6t - 3$.
b) Lisa: 3; $6 \cdot 1{,}5 - 3 = 6$; $6 \cdot 2 - 3 = 9$ (in km).
c) $4t = 6t - 3$, also $t = 1{,}5$ Stunden, das ist um $10{:}30$ Uhr bei $s = 6$ km.
d) Tim: $t = \frac{12}{4} = 3$ h. Lisa: $6t - 3 = 12$, $t = 2{,}5$ h. Lisa ist $0{,}5$ h $= 30$ Minuten früher am Ziel.
Lisas Funktion ist um eine halbe Stunde nach rechts verschoben, deshalb steht $t - 0{,}5$ in der Klammer. Antwort: Lisa holt Tim um 10:30 Uhr nach 6 km ein und erreicht das Ziel eine halbe Stunde vor ihm.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $F(t) = 3000 - 25t$.
b) $3000 - 500 = 2500$; $3000 - 1000 = 2000$; $3000 - 1500 = 1500$ Liter.
c) $3000 - 25t = 0$, $t = 120$ Tage.
d) $3000 - 25t = 500$, $t = 100$ Tage.
e) $90 \cdot 25 = 2250$ l, Kosten *2250\cdot0{,}95=2137{,}50\,€*.
Die Steigung ist der tägliche Verbrauch mit negativem Vorzeichen, der Achsenabschnitt der volle Tank. Antwort: Nach 100 Tagen muss nachbestellt werden,

nach 120 Tagen wäre der Tank leer; 90 Tage kosten 2137,50 €.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $T(x) = 18 - 0{,}6x$.
b) $18 - 5{,}4 = 12{,}6\,^\circ$C; $18 - 10{,}8 = 7{,}2\,^\circ$C.
c) $18 - 0{,}6x = 0$, $x = 30$, also $3\,000$ m über der Talstation.
d) $m = -0{,}6$: Die Temperatur sinkt um $0{,}6^\circ$C pro 100 m. $b = 18$: Temperatur an der Talstation.
e) $x = 35$: $18 - 0{,}6 \cdot 35 = -3{,}0\,^\circ$C. Es herrscht also Frost, Schnee ist wahrscheinlich.
Antwort: Die Nullgradgrenze liegt 3000 m über der Talstation, und auf einem 3,5 km höheren Gipfel herrschen etwa $-3\,^\circ$C. Das Modell gilt nur näherungsweise, weil die Temperatur auch vom Wetter abhängt.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $m = -2$; $-4 = -2 \cdot 3 + b$, $b = 2$: $y = -2x + 2$.
b) $S_y(0|2)$; Nullstelle: $-2x + 2 = 0$, $x = 1$: $N(1|0)$.
c) $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ Flächeneinheit.
d) $-2 \cdot 5 + 2 = -8$: ja, Q liegt auf g.
Die Parallele übernimmt die Steigung -2, der Achsenabschnitt wird mit dem Punkt P bestimmt. Das Dreieck mit den Achsen ist rechtwinklig, seine Katheten sind die Abstände der Achsenschnittpunkte vom Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $0{,}5x + 2 = -x + 8$, $1{,}5x = 6$, $x = 4$, $y = 4$: $S(4|4)$.
b) g: $(0|2)$; h: $(0|8)$.
c) Grundseite auf der y-Achse $8 - 2 = 6$, Höhe $= x_S = 4$: $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
d) g liegt über h für $x > 4$ (rechts vom Schnittpunkt).
Antwort: Das Dreieck hat den Flächeninhalt 12. Die Grundseite liegt auf der y-Achse zwischen den beiden Achsenabschnitten, die Höhe ist der waagerechte Abstand des Schnittpunkts von der y-Achse.