Lernzettel - Kreis: Umfang und Fläche

Klasse: Klasse 8

Kreise begegnen dir bei Rädern, Tellern und Brunnen. Du lernst, wie du ihren Umfang und ihre Fläche berechnest.

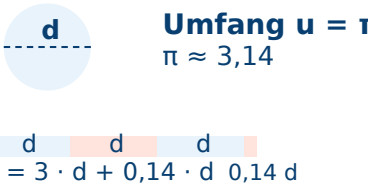
Einstieg: Das Rad der Pizza

Leon bestellt eine Pizza mit dem Durchmesser 30 cm für *9{,}60\,€*. Seine Schwester möchte stattdessen zwei kleine Pizzen mit je 20 cm für *5{,}50\,€* das Stück. Leon sagt: „Zwei kleine sind mehr als eine große, $20 + 20 > 30$.“ Stimmt das? Eine Pizza ist ein Kreis, und beim Kreis zählt nicht der Durchmesser, sondern die Fläche πr^2: Die große hat etwa $707\,\text{cm}^2$, die beiden kleinen zusammen nur etwa $628\,\text{cm}^2$. Der Radius geht quadratisch ein, deshalb täuscht der Blick auf den Durchmesser. In diesem Kapitel lernst du, solche Fragen sicher zu entscheiden und Kreise im Alltag zu berechnen: bei Rädern, Brunnen, Fenstern und Sportplätzen.

Die Kreiszahl Pi

Definition: Kreiszahl π

Teilst du bei jedem Kreis den Umfang durch den Durchmesser, erhältst du immer dieselbe Zahl, die **Kreiszahl** π (sprich „Pi“). Es gilt $\pi \approx 3{,}14159\ldots$; die Nachkommastellen hören nie auf und wiederholen sich nicht.

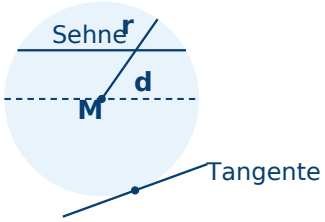


\n

Hinweis

In der Schule rechnest du mit der π-Taste des Taschenrechners oder mit $\pi \approx 3{,}14$.

Begriffe am Kreis



\n

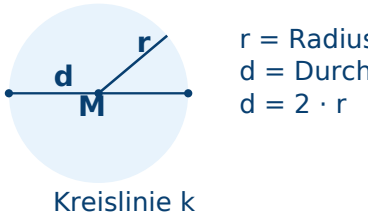
Definition: Radius und Durchmesser

- **Mittelpunkt** M: der Punkt, von dem alle Punkte des Kreises gleich weit entfernt sind.
- **Radius** r: Abstand vom Mittelpunkt zum Kreisrand.
- **Durchmesser** $d = 2r$: längste Strecke durch den Mittelpunkt.
- **Umfang** U: Länge der Kreislinie.
- **Flächeninhalt** A: Größe der Fläche im Inneren.

Umfang und Flächeninhalt

Satz: Formeln für den Kreis

$$U = 2\pi r = \pi d \qquad A = \pi r^2$$



\n

Merke: Quadratisch

Der Radius geht beim Flächeninhalt **quadratisch** ein. Verdoppelst du den Radius, wird der Umfang doppelt so groß, die Fläche aber vier Mal so groß.

Beispiel 1: Umfang und Fläche

Ein Kreis hat den Radius $r = 5$ cm.

$U = 2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 31{,}42$ cm.

$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78{,}54$ cm².

Beispiel 2: Aus dem Durchmesser

Ein runder Brunnen hat den Durchmesser 12 m.

Radius: $r = 6$ m.

$U = \pi \cdot 12 \approx 37{,}70$ m und $A = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10$ m².

So gehst du vor: Radius berechnen

1. Schreibe die passende Formel auf: $U = 2\pi r$ oder $A = \pi r^2$.
2. Stelle nach r um: $r = \dfrac{U}{2\pi}$ beziehungsweise $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$.
3. Setze ein und rechne mit der π-Taste.
4. Mache die Probe mit der Ausgangsformel.

Beispiel 3: Radius aus der Fläche

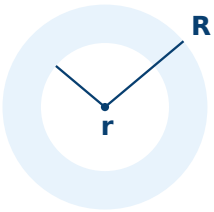
Ein Kreis hat die Fläche $50{,}27$ cm². Wie groß ist der Radius?

$r = \sqrt{50{,}27 : \pi} \approx \sqrt{16} = 4$ cm.

Kreisring, Halbkreis und zusammengesetzte Figuren

Definition: Kreisring

Ein **Kreisring** entsteht, wenn aus einem großen Kreis (Radius R) ein kleinerer Kreis (Radius r) mit demselben Mittelpunkt herausgeschnitten wird. Er ist ein Unterschied zweier Kreisflächen.



\n

Regel: Kreisring und Halbkreis

- Kreisring: $A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$
- Halbkreis: $A = \frac{1}{2}\pi r^2$ und $U = \pi r + 2r$

Bei zusammengesetzten Figuren zerlegst du in bekannte Teile, rechnest einzeln und addierst oder subtrahierst.

Beispiel 4: Kreisring

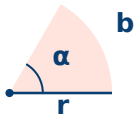
Berechne den Kreisring mit $R = 8$ cm und $r = 5$ cm.

$A = \pi \cdot (64 - 25) = 39\pi \approx 122{,}52$ cm².

Kreisteile: Sektor und Bogen

Definition: Kreissektor

Ein **Kreissektor** ist ein „Tortenstück“ mit dem Mittelpunktswinkel α. Er ist der Bruchteil $\frac{\alpha}{360^\circ}$ des ganzen Kreises. Die zugehörige Kreislinie heißt **Bogen**.



\n

Satz: Bogenlänge und Sektorfläche

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \qquad A_{\text{Sektor}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Beispiel 5: Sektor

Berechne Bogenlänge und Fläche eines Sektors mit $r = 10$ cm und $\alpha = 90^\circ$.

Der Winkel ist ein Viertel des Vollwinkels.

$b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 10 \approx 15{,}71$ cm und $A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 100 \approx 78{,}54$ cm².

Beispiel 6: Rad und Umdrehungen

Ein Fahrradrad hat den Durchmesser 70 cm. Wie viele Umdrehungen braucht es für einen Kilometer?

Eine Umdrehung: $U = \pi \cdot 70 \approx 219{,}91$ cm.

$\frac{100\,000}{219{,}91} \approx 455$ Umdrehungen.

Beispiel 7: Fenster

Ein Fenster besteht aus einem Rechteck (80 cm breit, 120 cm hoch) mit aufgesetztem Halbkreis. Wie groß ist die Fläche?

Der Durchmesser des Halbkreises ist die Breite, also $r = 40$ cm.

Rechteck: $80 \cdot 120 = 9600$ cm². Halbkreis: $\frac{1}{2}\pi \cdot 40^2 \approx 2513$ cm².

Insgesamt etwa 12 113 cm², also gut 1,2 m².

Hinweis

Die Formel $A = \pi r^2$ lässt sich so verstehen: Zerschneide eine Pizza in viele schmale Stücke und lege sie abwechselnd nebeneinander. Es entsteht fast ein Rechteck mit der Höhe r und der Breite πr (dem halben Umfang). Die Fläche ist also $r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Die Zahl Pi genauer betrachtet

Schon die alten Griechen suchten ein genaues Verhältnis von Umfang zu Durchmesser. Archimedes schloss durch Einschachteln mit regelmäßigen Vielecken, dass π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ liegt. Bruch $\frac{22}{7} \approx 3{,}1429$ ist eine gute Näherung für den Kopfrechner. Mit dem Computer kennt man heute mehrere Billionen Stellen. Für die Praxis genügt $\pi \approx 3{,}14$, doch die π-Taste liefert genauere Ergebnisse. Runde erst am Schluss, damit sich Rundungsfehler nicht aufsummieren.

Beispiel 8: Näherung prüfen

Wie weit liegt $\frac{22}{7}$ vom wahren Wert von π entfernt? Wie groß ist der Fehler bei einem Kreis mit $r = 10$ m?

$\frac{22}{7} \approx 3{,}142857$, $\pi \approx 3{,}141593$. Der Unterschied beträgt etwa $0{,}00126$. Beim Umfang $U = 2\pi \cdot 10$ macht das einen Fehler von $20 \cdot 0{,}00126 \approx 0{,}025$ m, also gut zwei Zentimeter.

Umdrehung und Weg

Rollt ein Rad ohne zu rutschen, so legt es bei einer Umdrehung genau seinen Umfang zurück. Damit lassen sich Weglängen und Geschwindigkeiten berechnen. Die Anzahl der Umdrehungen ist $\frac{\text{Strecke}}{\text{Umfang}}$. Das gilt für Fahrräder, Autoreifen, Seilrollen und Zahnräder. Bei zwei Rädern mit verschiedenem Durchmesser dreht sich das kleinere öfter.

Beispiel 9: Autoreifen

Ein Autoreifen hat den Durchmesser 64 cm. Wie viele Umdrehungen macht er pro Kilometer, und wie viele pro Minute bei 90 km/h?

Umfang: $U = \pi \cdot 64 \approx 201{,}06$ cm $\approx 2{,}01$ m. Pro Kilometer: $\frac{1000}{2{,}01} \approx 497$ Umdrehungen. Bei 90 km/h sind es 1500 m pro Minute, also $\frac{1500}{2{,}01} \approx 746$ Umdrehungen pro Minute.

Zusammengesetzte Figuren richtig zerlegen

Viele Aufgaben bestehen aus Kreisen, Halbkreisen und Rechtecken. Du zerlegst die Figur in bekannte Teile, rechnest jeden Teil einzeln und addierst oder subtrahierst. Achte darauf,

dass du bei Umfangsberechnungen nur die äußere Randlinie zählst: Die Linie, an der ein Halbkreis auf einem Rechteck sitzt, gehört nicht zum Umfang.

Beispiel 10: Stadionbahn

Eine Laufbahn besteht aus einem Rechteck (80 m $\times$ 60 m) mit zwei Halbkreisen an den kurzen Seiten. Berechne Umfang und Fläche.

Die beiden Halbkreise ergeben zusammen einen Kreis mit $d = 60$ m, also $r = 30$ m. Umfang: $2 \cdot 80 + \pi \cdot 60 \approx 160 + 188{,}50 = 348{,}50$ m. Fläche: Rechteck $4800\,\mathrm{m}^2$ plus Kreis $\pi \cdot 900 \approx 2827{,}43\,\mathrm{m}^2$, zusammen etwa $7627\,\mathrm{m}^2$.

Achtung: Vier Fehlerquellen

Erstens: In πr^2 steht der Radius, nicht der Durchmesser. Zweitens: Quadriere zuerst r, dann multipliziere mit π. Drittens: Die Einheit der Fläche ist cm^2, nicht cm. Viertens: Bei einem Halbkreis gehört der Durchmesser zum Umfang, bei einem aufgesetzten Halbkreis dagegen nicht.

Wusstest du?

Im Altertum versuchten Mathematiker, ein Quadrat mit genau derselben Fläche wie ein Kreis nur mit Zirkel und Lineal zu zeichnen. Erst 1882 bewies Ferdinand von Lindemann, dass das unmöglich ist, weil π keine einfache Zahl ist, sondern transzendent. Der Satz „die Quadratur des Kreises“ bedeutet seitdem eine unlösbare Aufgabe.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- $\pi \approx 3{,}14159$ ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, bei allen Kreisen gleich.
- Umfang: $U = 2\pi r = \pi d$ (Einheit: Länge).
- Fläche: $A = \pi r^2$ (Einheit: Fläche); setze immer den Radius ein.
- Verdoppelter Radius: doppelter Umfang, vierfache Fläche.
- Kreisring: $A = \pi(R^2 - r^2)$; Halbkreis: $A = \frac{1}{2}\pi r^2$ und $U = \pi r + 2r$.
- Sektor: Bruchteil $\frac{\alpha}{360^\circ}$ von Umfang und Fläche.
- Rückwärts rechnen: $r = \frac{U}{2\pi}$ oder $r = \sqrt{A/\pi}$.
- Zusammengesetzte Figuren: zerlegen, einzeln rechnen, addieren oder subtrahieren.

Achtung

Umfang und Fläche nicht verwechseln: Der Umfang hat die Einheit cm, die Fläche cm². Setze in πr^2 den Radius ein, nicht den Durchmesser, und quadriere zuerst: πr^2 ist nicht $(\pi r)^2$. Beim Kreisring rechnest du $R^2 - r^2$, nicht $R - r$.

Vertiefung: Kreisberechnungen verstehen

Einstieg: Woher kommt die Flächenformel?

Schneide einen Kreis wie eine Torte in sehr viele schmale Stücke und lege sie abwechselnd mit der Spitze nach oben und nach unten nebeneinander. Es entsteht eine Figur, die fast wie ein Rechteck aussieht. Ihre Höhe ist der Radius r, ihre Länge ist der halbe Umfang, also πr. Je mehr Stücke man nimmt, desto genauer wird das Rechteck. Seine Fläche ist Länge mal Höhe: $\pi r \cdot r = \pi r^2$. So erklärt sich die Formel für den Flächeninhalt des Kreises, ohne dass man sie auswendig lernen muss.

So gehst du vor: Zusammengesetzte Figuren mit Kreisteilen

1. Zerlege die Figur in bekannte Teile: Rechtecke, Dreiecke, Kreise, Halbkreise, Viertelkreise oder Kreisringe.
2. Notiere für jeden Kreisteil den Radius. Ist der Durchmesser gegeben, halbiere ihn zuerst.
3. Berechne die Teilflächen und addiere oder subtrahiere sie, je nachdem ob der Teil hinzukommt oder ausgeschnitten wird.
4. Beim Umfang zählst du nur die Linien, die außen liegen. Innere Trennlinien gehören nicht dazu.
5. Rechne erst am Ende mit gerundeten Werten, damit sich Rundungsfehler nicht summieren.

Achtung: Radius oder Durchmesser?

Der häufigste Fehler bei Kreisaufgaben ist, den Durchmesser in die Flächenformel einzusetzen. Bei $d = 10\,\text{cm}$ ist $r = 5\,\text{cm}$ und die Fläche $\pi \cdot 25 \approx 78{,}5\,\text{cm}^2$. Wer $\pi \cdot 10^2$ rechnet, erhält das Vierfache. Lies deshalb jede Aufgabe genau und schreibe den Radius ausdrücklich hin, bevor du rechnest.

Schon gewusst?

Die Zahl π hat unendlich viele Nachkommastellen, die sich nie periodisch wiederholen. Archimedes bestimmte schon um 250 v. Chr. mit Vielecken, dass π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ liegt. Heute kennen Computer Billionen von Stellen. Für die Praxis genügen aber wenige: Mit zehn Nachkommastellen könnte man den Erdumfang auf Bruchteile eines Millimeters genau berechnen.

Beispiel: Ein Viertelkreis im Garten

In einer Gartenecke wird ein Beet in Form eines Viertelkreises mit dem Radius 4 m angelegt. Berechne Fläche und Randlänge.

Ein Viertelkreis ist ein Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 90°. Seine Fläche ist ein Viertel der Kreisfläche: $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 12{,}57\,\text{m}^2$. Der Rand besteht aus dem

Viertelbogen $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 \approx 6{,}28\,\mathrm{m}$ und den beiden geraden Kanten von je 4 m. Zusammen sind das etwa 14,28 m. Wer nur den Bogen berechnet, vergisst die beiden Radien als Teil des Randes.

Ottos Tipp

Schreibe zuerst auf, ob Radius oder Durchmesser gegeben ist. Ein vergessenes Halbieren oder Verdoppeln ist der häufigste Fehler. Rechne zur Kontrolle grob mit $\pi \approx 3$: Das Ergebnis darf nicht weit davon abweichen.