Lösungen - Kreis: Umfang und Fläche

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $d = 8$ cm; $r = 9$ m; $d = 7$ dm; $r = 0{,}6$ km.
b) Der Durchmesser ist die längste Strecke im Kreis (Sehne durch den Mittelpunkt). Der Durchmesser ist immer doppelt so lang wie der Radius, deshalb multipliziert man den Radius mit 2 oder halbiert den Durchmesser. Der Durchmesser ist die längste Sehne, weil er durch den Mittelpunkt geht. Alle anderen Sehnen sind kürzer.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $U = 2\pi \cdot 5 = 31{,}42$ cm.
b) $U = \pi \cdot 12 = 37{,}70$ m.
c) $U = 2\pi \cdot 2{,}5 = 15{,}71$ dm.
d) $U = \pi \cdot 0{,}8 = 2{,}51$ m.
Ist der Radius gegeben, verwendet man $U = 2\pi r$; ist der Durchmesser gegeben, ist $U = \pi d$ schneller. Beide Formeln sind gleichwertig, denn $d = 2r$. Überschlag zu a): Der Umfang ist etwas mehr als das Dreifache des Durchmessers, also etwas mehr als 30 cm.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $A = \pi \cdot 3^2 = 28{,}27\,\text{cm}^2$.
b) $A = \pi \cdot 4{,}5^2 = 63{,}62\,\text{m}^2$.
c) $r = 5$ cm; $A = \pi \cdot 25 = 78{,}54\,\text{cm}^2$.
d) $r = 0{,}8$ m; $A = \pi \cdot 0{,}64 = 2{,}01\,\text{m}^2$.
In die Flächenformel gehört immer der Radius, und er wird quadriert, bevor man mit π multipliziert. Bei c) und d) muss der Durchmesser deshalb zuerst halbiert werden. Die Einheit der Fläche ist eine Quadrateinheit.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r = \frac{31{,}42}{2\pi} = 5{,}00 \approx 5$ cm.
b) $r = \sqrt{\frac{78{,}54}{\pi}} = 5{,}00 \approx 5$ cm.
c) $d = \frac{U}{\pi} = \frac{62{,}83}{\pi} = 20{,}00 \approx 20$ m.
d) $r = \sqrt{\frac{200}{\pi}} = 7{,}98$ m.
Beim Rückwärtsrechnen stellt man die Formel nach der gesuchten Größe um. Aus dem Umfang erhält man den Radius durch Teilen durch 2π, aus der Fläche durch Teilen durch π und anschließendes Wurzelziehen. Probe zu d): $\pi \cdot 7{,}98^2 \approx 200$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $U = 2\pi \cdot 3 = 18{,}85$ cm; $A = \pi \cdot 9 = 28{,}27\,\text{cm}^2$.
b) $U = 2\pi \cdot 6 = 37{,}70$ cm; $A = \pi \cdot 36 = 113{,}10\,\text{cm}^2$.
c) Der Umfang wird doppelt so groß, die Fläche vier Mal so groß (2^2).
d) Umfang: dreifach, Fläche: neunfach (3^2).
Antwort: Wird der Radius mit dem Faktor k vergrößert, wächst der Umfang mit dem Faktor k, die Fläche aber mit k^2. Der Grund ist, dass in der Flächenformel der Radius quadriert wird.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $A = \frac{1}{2}\pi \cdot 36 = 56{,}55\,\text{cm}^2$.
b) $U = \pi \cdot 6 + 12 = 30{,}85$ cm.
c) $A = \pi(64 - 25) = 39\pi = 122{,}52\,\text{cm}^2$.
Bei einem Halbkreis gehört zum Umfang nicht nur der halbe Kreisbogen, sondern auch der Durchmesser als gerade Kante. Die Fläche eines Kreisrings ist die Differenz aus großem und kleinem Kreis: $\pi(R^2 - r^2)$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 10 = 15{,}71$ cm; $A = \frac{1}{4}\pi \cdot 100 = 78{,}54\,\text{cm}^2$.
b) $b = \frac{1}{6} \cdot 20\pi = 10{,}47$ cm; $A = \frac{1}{6} \cdot 100\pi = 52{,}36\,\text{cm}^2$.
c) $b = \frac{1}{3} \cdot 20\pi = 20{,}94$ cm; $A = \frac{1}{3} \cdot 100\pi = 104{,}72\,\text{cm}^2$.
d) $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.
Bogenlänge und Sektorfläche sind proportional zum Mittelpunktswinkel. Der Bruch $\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt an, welcher Anteil des ganzen Kreises gemeint ist. Ein Achtel der Fläche entspricht deshalb einem Achtel des Vollwinkels.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $U = \pi \cdot 70 = 219{,}91$ cm $\approx 2{,}20$ m.
b) $150\,000 : 219{,}91 \approx 682$ Umdrehungen.
c) In einer Minute 250 m $= 25\,000$ cm: $\frac{25000}{219{,}91} \approx 114$ Umdrehungen.
d) $U = \pi \cdot 28 = 87{,}96$ cm; $\frac{150000}{87{,}96} \approx 1705$ Umdrehungen.
Bei einer Umdrehung legt das Rad genau seinen Umfang zurück. Die Anzahl der Umdrehungen erhält man also, indem man die Strecke durch den Umfang teilt; dabei müssen beide Längen in derselben Einheit stehen. Das kleinere Rad muss sich deutlich öfter drehen.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Klein: $\pi \cdot 10^2 = 314{,}2\,\text{cm}^2$; groß: $\pi \cdot 15^2 = 706{,}9\,\text{cm}^2$.
b) Klein: $\frac{550}{314{,}16} \approx 1{,}75$ ct; groß: $\frac{960}{706{,}86} \approx 1{,}36$ ct.

c) Die große Pizza ist pro Fläche günstiger.
d) Zwei kleine: $628{,}3\,\mathrm{cm}^2$ für *11{,}00\,€*; eine große hat mehr Fläche ($706{,}9\,\mathrm{cm}^2$) und ist billiger (*9{,}60\,€*). Die große lohnt sich.
Antwort: Die große Pizza ist pro Quadratzentimeter etwa 0,4 Cent günstiger und hat mehr Fläche als zwei kleine zusammen. Der Grund: Der Durchmesser ist nur 1,5-mal so groß, die Fläche aber $1{,}5^2 = 2{,}25$-mal so groß.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $A = \pi \cdot 1{,}2^2 = 4{,}52\,\mathrm{m}^2$.
b) *4{,}52\cdot39=176{,}28\,€*.
c) $U = \pi \cdot 2{,}4 = 7{,}54$ m; Kosten *7{,}54\cdot3{,}50=26{,}39\,€*.
d) $\sqrt{4{,}52} \approx 2{,}13$ m.
Antwort: Der Teppich kostet rund 176 €, die Borte rund 26 €. Für die Fläche wird der Radius 1,2 m verwendet, für die Borte der Umfang. Ein flächengleiches Quadrat wäre etwa 2,13 m breit, also schmaler als der Durchmesser.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $2 \cdot 40 + 2\pi r = 200$, also $2\pi r = 120$ und $r = \frac{60}{\pi} \approx 19{,}10$ m.
b) $d = 2r \approx 38{,}20$ m.
c) Rechteck $40 \cdot 38{,}20 \approx 1528\,\mathrm{m}^2$; Kreis $\pi r^2 \approx 1146\,\mathrm{m}^2$; zusammen etwa $2674\,\mathrm{m}^2$.
d) *\approx48\,132\,€*.
Der Ansatz nutzt, dass die beiden Halbkreise zusammen einen ganzen Kreis bilden. Deshalb ist ihr gemeinsamer Bogen $2\pi r$. Antwort: Der Radius beträgt etwa 19,10 m, die Innenfläche rund 2674 m², der Kunstrasen kostet rund 48 100 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $A = \pi \cdot 6^2 = 113{,}10\,\mathrm{m}^2$.
b) $\pi \cdot 7^2 = 153{,}94\,\mathrm{m}^2$.
c) $\pi(49 - 36) = 13\pi = 40{,}84\,\mathrm{m}^2$.
d) *40{,}84\cdot62=2532{,}08\,€*.
Antwort: Der 1 m breite Weg hat eine Fläche von rund 40,84 m² und kostet etwa 2532 €. Wichtig ist, dass der äußere Radius 7 m beträgt, denn der Weg kommt zum Brunnenradius von 6 m hinzu.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $360^\circ : 12 = 30^\circ$.
b) $A = \frac{1}{12}\pi \cdot 13^2 = 44{,}24\,\mathrm{cm}^2$.
c) $b = \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 13 = 6{,}81$ cm.
d) $2 \cdot 13 + 6{,}81 = 32{,}81$ cm.
Jedes Tortenstück ist ein Kreissektor mit dem Anteil $\frac{1}{12}$ des ganzen Kreises. Für Fläche

und Bogen wird der Radius 13 cm verwendet, also der halbe Durchmesser. Die gesamte Kante besteht aus zwei geraden Schnitten und dem Rand.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 = 16{,}76\,\text{m}^2$.
b) $\pi \cdot 16 = 50{,}27\,\text{m}^2$.
c) $\frac{\alpha}{360} \cdot 50{,}27 = 10$, also $\alpha = \frac{3600}{50{,}27} \approx 72^\circ$.
d) $\frac{100}{50{,}27} \approx 1{,}99$: mindestens 2 Sprenger.
Antwort: Bei 120° bewässert der Sprenger etwa 16,8 m², bei voller Drehung etwa 50,3 m². Für 10 m² muss er auf rund 72° eingestellt werden. Zwei Sprenger reichen rechnerisch knapp, in der Praxis braucht man wegen der Lücken zwischen den Kreisen mehr.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Der Durchmesser ist die Breite 80 cm, also $r = 40$ cm.
b) $9600 + \frac{1}{2}\pi \cdot 40^2 = 9600 + 2513 = 12\,113\,\text{cm}^2 = 1{,}21\,\text{m}^2$.
c) $80 + 2 \cdot 120 + \pi \cdot 40 = 320 + 125{,}66 = 445{,}66$ cm $\approx 4{,}46$ m.
d) Glas *1{,}21\cdot85\approx102{,}85\,€*; Holz *4{,}46\cdot12=53{,}52\,€*; zusammen etwa *156{,}37\,€*.
e) $60 \cdot 100 + \frac{1}{2}\pi \cdot 30^2 = 6000 + 1414 = 7414\,\text{cm}^2$. Das erste Fenster hat $12\,113\,\text{cm}^2$, das zweite also deutlich weniger Fläche.
Die Figur wird zerlegt in ein Rechteck und einen Halbkreis, dessen Durchmesser die Fensterbreite ist. Zum Rahmen gehören die untere Kante, die beiden Seiten und der Bogen, nicht aber die Trennlinie zwischen Rechteck und Halbkreis.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\pi \cdot 36 = 113{,}10\,\text{m}^2$.
b) $\pi(196 - 36) = 160\pi = 502{,}65\,\text{m}^2$.
c) $\pi(324 - 196) = 128\pi = 402{,}12\,\text{m}^2$.
d) Asphalt *502{,}65\cdot32=16\,085\,€*; Pflaster *402{,}12\cdot55=22\,117\,€*; zusammen *38\,201\,€*.
e) $\frac{160\pi}{324\pi} = \frac{160}{324} \approx 49{,}4\,\%$.
Antwort: Die Fahrbahn macht knapp die Hälfte der Gesamtfläche aus. Alle Teilflächen sind Kreisringe, deren Fläche man als Differenz zweier Kreise berechnet. Die beiden Beläge kosten zusammen rund 38 200 €.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Wiese $400\,\text{m}^2$; Beet $\pi \cdot 36 = 113{,}10\,\text{m}^2$.
b) $400 - 113{,}10 = 286{,}90\,\text{m}^2$.
c) $U = \pi \cdot 12 = 37{,}70$ m; Kosten *37{,}70\cdot14=527{,}80\,€*.

d) $\frac{113{,}10}{400} \approx 28{,}3\,\%$.
e) Höchstens $d = 20$ m, $A = \pi \cdot 100 = 314{,}16\,\mathrm{m}^2$, Anteil $\frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\,\%$.
Antwort: Das Beet bedeckt gut 28 % der Wiese, der Zaun kostet 527,80 €. Ein Kreis, der genau in ein Quadrat passt, bedeckt immer $\frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\,\%$ der Quadratfläche, unabhängig von der Größe.

Lösung zu Aufgabe 18

a) 360°, 120°, 90°, 30° (je Minute 6°).
b) $U = 2\pi \cdot 1{,}2 = 7{,}54$ m. Daher: 60 min: $7{,}54$ m; 20 min: $2{,}51$ m; 15 min: $1{,}88$ m; 5 min: $0{,}63$ m.
c) $A = \pi \cdot 1{,}44 = 4{,}52\,\mathrm{m}^2$. Daher: 60 min: $4{,}52$; 20 min: $1{,}51$; 15 min: $1{,}13$; 5 min: $0{,}38$ (alle in m^2).
d) $7{,}54 \cdot 24 \cdot 365 = 66\,050$ m $\approx 66{,}1$ km.
Pro Minute dreht sich der Minutenzeiger um 6°. Weg und Fläche sind proportional zur Zeit, deshalb rechnet man jeweils den passenden Anteil des Vollkreises aus. Antwort: Die Zeigerspitze legt in einem Jahr rund 66 km zurück.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Diagonale ist der Durchmesser: 10 cm.
b) $a^2 + a^2 = 100$, also $a^2 = 50$ und $a \approx 7{,}07$ cm. Die Fläche ist $a^2 = 50\,\mathrm{cm}^2$.
c) $\pi \cdot 25 = 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$.
d) $\frac{50}{78{,}54} \approx 63{,}7\,\%$; der Rest sind $28{,}54\,\mathrm{cm}^2$, also $36{,}3\,\%$.
Antwort: Das Quadrat bedeckt knapp zwei Drittel des Kreises. Das gilt für jedes Quadrat, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, denn das Verhältnis $\frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$ hängt nicht vom Radius ab.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $r = \frac{40075}{2\pi} \approx 6378$ km.
b) $\Delta r = \frac{\Delta U}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159$ m, also etwa 16 cm.
c) Genauso: $\Delta r = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ m, also 16 cm. Es ist unabhängig vom Radius.
d) Die Radiusänderung hängt nur von der Umfangsänderung ab: $\Delta r = \frac{\Delta U}{2\pi}$.
Antwort: Das Seil hebt sich rund 16 cm über den Boden, egal ob um die Erde oder um einen Tennisball. Das widerspricht dem Bauchgefühl, folgt aber direkt aus der linearen Formel $U = 2\pi r$.