Lernzettel - Geometrische Konstruktionen und Abbildungen

Klasse: Klasse 8

Eine Abbildung ordnet jedem Punkt einer Figur einen Bildpunkt zu. In diesem Kapitel bewegst du Figuren, ohne sie zu verändern, und konstruierst mit Zirkel und Lineal.

Einstieg: Die Schatzkarte

Kapitän Fynn hat eine Schatzkarte mit einem Koordinatensystem. Sein Lager liegt bei $L(1|1)$. Die Anweisung lautet: „Gehe 4 nach rechts und 2 nach oben, spiegle den Punkt an der y-Achse und drehe ihn dann um den Ursprung um $90°$." Fynn zeichnet die Punkte $(5|3)$, $(-5|3)$ und $(-3|-5)$. Bei jedem Schritt bleiben Abstände und Winkel gleich, nur die Lage ändert sich. Solche Bewegungen heißen Kongruenzabbildungen. In diesem Kapitel lernst du sie so genau, dass du jeden Bildpunkt berechnen kannst, ohne zu zeichnen, und du erfährst, wie man mit Zirkel und Lineal wichtige Linien konstruiert.

Kongruenzabbildungen

Definition: Kongruenzabbildung

Bei einer **Kongruenzabbildung** bleiben Streckenlängen, Winkelgrößen und Flächeninhalt erhalten. Urbild und Bild sind **kongruent** (deckungsgleich). Dazu gehören Achsenspiegelung, Verschiebung, Drehung und Punktspiegelung.

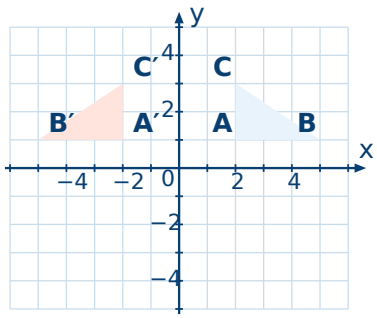
Merke: Keine Streckung

Eine Streckung ist keine Kongruenzabbildung, weil sie die Länge verändert.

Achsenspiegelung

Definition: Achsenspiegelung

Bei der Spiegelung an einer Geraden a (der **Spiegelachse**) liegen Punkt und Bildpunkt auf einer Senkrechten zur Achse und haben von ihr denselben Abstand. Die Achse ist die Mittelsenkrechte der Strecke PP'.



\n

Regel: Spiegelung im Koordinatensystem

- an der x-Achse: $(x|y) \to (x|-y)$
- an der y-Achse: $(x|y) \to (-x|y)$
- an der Geraden $y = x$: $(x|y) \to (y|x)$
- an der Geraden $x = 3$: $(x|y) \to (6-x|y)$

Beispiel 1: Spiegeln

Spiegle $A(2|3)$ an beiden Achsen und $P(5|2)$ an der Geraden $x = 3$.

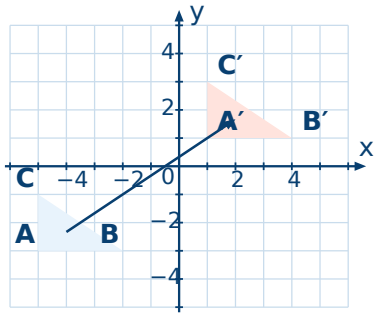
$A(2|3)$ wird an der x-Achse zu $A'(2|-3)$, an der y-Achse zu $A''(-2|3)$.

$P(5|2)$ hat von $x = 3$ den Abstand 2. Also $P'(1|2)$, denn $3 - 2 = 1$.

Verschiebung

Definition: Verschiebung

Bei einer **Verschiebung** wird jeder Punkt um denselben **Verschiebungsvektor** $\binom{a}{b}$ bewegt: $(x|y) \to (x+a\,|\,y+b)$. Alle Verbindungsstrecken von Punkt und Bildpunkt sind gleich lang und parallel.



\n

Beispiel 2: Verschieben

Verschiebe $P(1|4)$ und $Q(-2|0)$ um $\binom{3}{-2}$. Welcher Vektor führt $A(2|4)$ nach $A'(6|1)$?

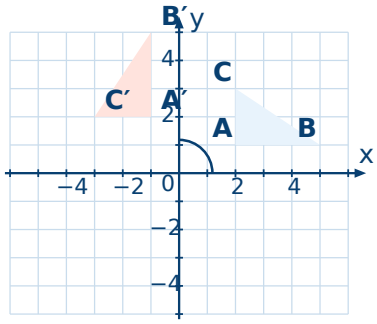
$P'(4|2)$ und $Q'(1|-2)$.

Vektor: $\binom{6-2}{1-4} = \binom{4}{-3}$.

Drehung

Definition: Drehung

Eine **Drehung** wird durch ein **Drehzentrum** Z und einen **Drehwinkel** festgelegt. Positive Winkel zählt man gegen den Uhrzeigersinn. Der Abstand zum Drehzentrum bleibt gleich.



\n

Regel: Drehung um den Ursprung

- $90°$ gegen den Uhrzeigersinn: $(x|y) \to (-y|x)$
- $180°$: $(x|y) \to (-x|-y)$
- $270°$ (also $90°$ im Uhrzeigersinn): $(x|y) \to (y|-x)$

Beispiel 3: Drehen

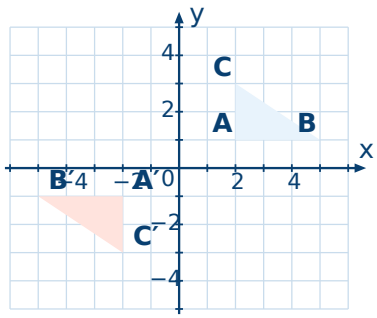
Drehe $P(3|1)$ und $Q(-2|4)$ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.

$P'(-1|3)$ und $Q'(-4|-2)$.

Punktspiegelung und Symmetrie

Definition: Punktspiegelung

Bei der **Punktspiegelung** an einem Zentrum Z liegt Z in der Mitte der Strecke PP'. Sie entspricht einer Drehung um $180°$. Am Ursprung gilt $(x|y) \to (-x|-y)$.



\n

Beispiel 4: Zentrum nicht im Ursprung

Spiegle $A(5|-3)$ am Zentrum $Z(1|1)$.
$A' = (2 \cdot 1 - 5 \,|\, 2 \cdot 1 - (-3)) = (-3|5)$.

Definition: Symmetrie

Eine Figur ist **achsensymmetrisch**, wenn sie bei einer Spiegelung in sich übergeht, und **drehsymmetrisch**, wenn sie bei einer Drehung um einen Winkel kleiner als $360°$ in sich übergeht.

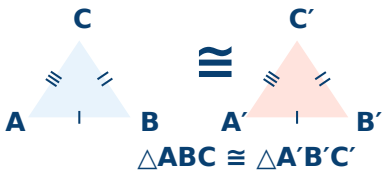


\n

Merke: Symmetrien bekannter Figuren

Quadrat: 4 Achsen, kleinster Drehwinkel $90°$. Gleichseitiges Dreieck: 3 Achsen, $120°$. Rechteck (kein Quadrat): 2 Achsen, $180°$. Regelmäßiges Sechseck: 6 Achsen, $60°$.

Kongruenzsätze für Dreiecke



\n

Satz: Kongruenzsätze

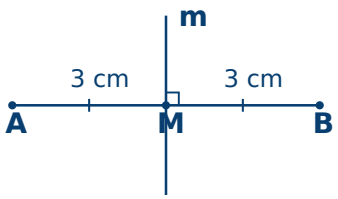
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in

- **SSS**: drei Seiten,
- **SWS**: zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
- **WSW** (oder WWS): einer Seite und zwei Winkeln,
- **SsW**: zwei Seiten und dem Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt.

Achtung

Drei Winkel allein reichen nicht, denn dann sind die Dreiecke nur ähnlich. Ein Dreieck mit den Seiten 3 cm, 4 cm und 8 cm gibt es nicht, weil $3 + 4$ ist. Es gilt die **Dreiecksungleichung**: Die Summe zweier Seiten ist immer größer als die dritte.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



\n

So gehst du vor: Mittelsenkrechte konstruieren

1. Zeichne um A einen Kreisbogen mit einem Radius größer als die halbe Strecke AB.
2. Zeichne um B einen Kreisbogen mit demselben Radius.
3. Verbinde die beiden Schnittpunkte der Bögen mit dem Lineal.
4. Die Gerade halbiert die Strecke und steht senkrecht auf ihr. Jeder ihrer Punkte hat von A und B denselben Abstand.

So gehst du vor: Winkelhalbierende konstruieren

1. Zeichne einen Kreisbogen um den Scheitel; er schneidet beide Schenkel.
2. Zeichne um beide Schnittpunkte Kreisbögen mit gleichem Radius.
3. Verbinde den Scheitel mit dem Schnittpunkt der beiden Bögen. Die Gerade teilt den Winkel in zwei gleich große Teile.

Abbildungen nacheinander ausführen

Beispiel 5: Verkettung

Verschiebe $P(1|2)$ um $\binom{2}{1}$ und spiegle das Bild an der x-Achse.

Verschiebung: $P'(3|3)$. Spiegelung: $P''(3|-3)$.

Die Reihenfolge ist wichtig: Spiegelst du zuerst, kann ein anderes Ergebnis herauskommen.

Merke: Zwei Spiegelungen

Zwei Spiegelungen an parallelen Achsen ergeben eine Verschiebung, zwei Spiegelungen an sich schneidenden Achsen eine Drehung.

Abbildungen als Rechenvorschrift

Im Koordinatensystem kannst du jede Abbildung als Vorschrift schreiben, die aus $(x|y)$ den Bildpunkt macht. Das spart das Zeichnen und liefert genaue Werte. Wichtig ist, dass du die Vorschrift richtig aufstellst: Bei der Verschiebung addierst du Vektoreinträge, bei der Spiegelung wechselst du das Vorzeichen einer Koordinate oder tauschst die Koordinaten, bei der Drehung vertauschst du beide Koordinaten und änderst ein Vorzeichen.

Beispiel 7: Dreieck spiegeln und drehen

Das Dreieck $A(2|1)$, $B(4|1)$, $C(3|3)$ wird an der y-Achse gespiegelt, das Bild um 90° gedreht. Gib die Bildpunkte an.

Spiegelung $(x|y) \to (-x|y)$: $A'(-2|1)$, $B'(-4|1)$, $C'(-3|3)$. Drehung $(x|y) \to (-y|x)$: $A''(-1|-2)$, $B''(-1|-4)$, $C''(-3|-3)$. Probe: $|AB| = 2$ und $|A''B''| = |-2-(-4)| = 2$.

Fixpunkte und Fixgeraden

Ein Fixpunkt ist ein Punkt, der bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird. Bei der Achsenspiegelung sind alle Punkte der Spiegelachse Fixpunkte. Bei der Drehung ist es nur das Drehzentrum, bei der Punktspiegelung nur das Zentrum, bei einer Verschiebung gibt es keine Fixpunkte. Eine Fixgerade geht als Ganzes in sich über, zum Beispiel jede Gerade durch das Zentrum bei der Punktspiegelung.

Beispiel 8: Fixpunkte erkennen

Welche Fixpunkte hat die Spiegelung an $y = x$?

Die Vorschrift lautet $(x|y) \to (y|x)$. Ein Fixpunkt muss $x = y$ erfüllen, also liegen genau die Punkte der Geraden $y = x$ fest, zum Beispiel $(3|3)$.

Konstruieren mit Zirkel und Lineal

Neben der Mittelsenkrechten und der Winkelhalbierenden gibt es weitere Grundkonstruktionen. Alle beruhen darauf, dass du mit dem Zirkel gleiche Abstände abträgst. Dadurch entstehen Raute und Drachen, und deren Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

So gehst du vor: Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällen

1. Zeichne um den Punkt P einen Kreisbogen, der die Gerade in zwei Punkten A und B schneidet.
2. Zeichne um A und um B zwei Kreisbögen mit demselben Radius, der größer als die halbe Strecke AB ist.
3. Verbinde P mit dem Schnittpunkt der beiden Bögen. Diese Gerade ist das Lot.

Beispiel 9: Dreieck mit Zahlen prüfen

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(2|4)$. Berechne den Mittelpunkt von AB und die Gleichung der Mittelsenkrechten.

Mittelpunkt $M(3|0)$. AB liegt auf der x-Achse, die Mittelsenkrechte ist also senkrecht: die Gerade $x = 3$. Auf ihr liegen alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, zum Beispiel $(3|5)$: Abstand zu A und B ist jeweils $\sqrt{9 + 25}$.

Wusstest du?

Muster in der Alhambra in Spanien zeigen fast alle Kongruenzabbildungen: Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen. Mathematiker haben bewiesen, dass es nur 17 verschiedene Arten gibt, die Ebene mit Mustern zu füllen. Auch die Computergrafik arbeitet mit diesen Abbildungen, wenn sie Figuren auf dem Bildschirm bewegt.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Kongruenzabbildungen (Spiegelung, Verschiebung, Drehung, Punktspiegelung) erhalten Längen, Winkel und Flächen.
- Achsenspiegelung: Punkt und Bild haben gleichen Abstand zur Achse; x-Achse: $(x|y) \to (x|-y)$, y-Achse: $(x|y) \to (-x|y)$.
- Verschiebung um $\binom{a}{b}$: $(x|y) \to (x+a\,|\,y+b)$.
- Drehung um den Ursprung: $90°$: $(x|y) \to (-y|x)$, $180°$: $(x|y) \to (-x|-y)$, $270°$: $(x|y) \to (y|-x)$.
- Punktspiegelung am Zentrum $Z(z_1|z_2)$: $(x|y) \to (2z_1 - x\,|\,2z_2 - y)$, sie ist eine Drehung um $180°$.
- Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW, SsW; drei Winkel allein genügen nicht.
- Dreiecksungleichung: Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte.
- Beim Verketten von Abbildungen ist die Reihenfolge wichtig; zwei Spiegelungen ergeben eine Verschiebung oder eine Drehung.

Achtung

Beim Spiegeln wechselt nur eine Koordinate das Vorzeichen (x-Achse: nur y). Positive Drehwinkel zählen gegen den Uhrzeigersinn. Beim Verschieben wendest du den

Vektor auf beide Koordinaten an. Verstelle beim Konstruieren den Zirkel nicht zwischendurch.

Vertiefung: Abbildungen erkennen und verketten

So gehst du vor: Eine unbekannte Abbildung bestimmen

1. Vergleiche Urbild und Bild: Sind die Figuren gleich groß? Dann liegt eine Kongruenzabbildung vor.
2. Prüfe den Umlaufsinn: Läuft die Reihenfolge der Ecken im Bild andersherum, handelt es sich um eine Achsenspiegelung.
3. Ist jeder Punkt um denselben Vektor verschoben, liegt eine Verschiebung vor. Berechne den Vektor aus einem Punktpaar.
4. Andernfalls suche ein Drehzentrum: Es ist von jedem Punkt und seinem Bildpunkt gleich weit entfernt und liegt auf allen Mittelsenkrechten der Strecken zwischen Punkt und Bildpunkt.
5. Kontrolliere deine Vermutung mit allen Eckpunkten.

Beispiel: Zwei Spiegelungen ergeben eine Drehung

Der Punkt $P(3|1)$ wird an der x-Achse und danach an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Welche Abbildung entsteht?

Die erste Spiegelung liefert $P'(3|-1)$. Bei der Spiegelung an $y = x$ werden die Koordinaten vertauscht: $P''(-1|3)$. Vergleicht man mit P, so gilt $(x|y) \to (-y|x)$. Das ist eine Drehung um 90° um den Ursprung. Die beiden Achsen schneiden sich im Ursprung unter 45°, und der Drehwinkel ist doppelt so groß. Diese Regel gilt allgemein für zwei Spiegelungen an sich schneidenden Achsen.

Schon gewusst?

Der Künstler M. C. Escher füllte ganze Flächen lückenlos mit Vögeln, Fischen und Eidechsen. Er nutzte dafür genau die Abbildungen aus diesem Kapitel: Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen. Auch die maurischen Fliesenmuster der Alhambra in Spanien beruhen darauf. Mathematiker haben bewiesen, dass es nur 17 grundsätzlich verschiedene Arten solcher ebener Muster gibt, und in der Alhambra findet man viele davon.

Ottos Tipp

Zeichne immer ein Koordinatensystem und trage die Punkte ein. Kontrolliere bei der Spiegelung, ob der Abstand zur Achse links und rechts gleich ist. Bei der Drehung muss der Abstand zum Drehzentrum gleich bleiben.