Arbeitsblatt - Geometrische Konstruktionen und Abbildungen

Klasse: Klasse 8 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Spiegeln an den Koordinatenachsen

Spiegle die Punkte an der x-Achse und an der y-Achse. Bei der Spiegelung an der x-Achse ändert sich y, bei der an der y-Achse x.

Punkt	an der x-Achse	an der y-Achse
$A(2\|3)$	?	?
$B(-4\|1)$	?	?
$C(5\|-2)$	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Welche Koordinate bleibt jeweils gleich?
c) Der Punkt $D(0\|4)$ wird an der y-Achse gespiegelt. Was fällt auf?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Spiegeln an anderen Geraden

Spiegle den Punkt an der angegebenen Geraden. Bestimme dazu den Abstand zur Achse.

a) $P(5\|2)$ an $x = 3$
b) $Q(-1\|4)$ an $x = 3$
c) $R(2\|3)$ an $y = -1$
d) $S(4\|-3)$ an $y = -1$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Verschieben

Verschiebe die Punkte um den Vektor $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ und bestimme dann einen Verschiebungsvektor aus zwei Punkten.

a) $P(1\|4)$
b) $Q(-2\|0)$
c) $R(3\|-3)$
d) Welcher Vektor führt $A(2\|4)$ nach $A'(6\|1)$?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Drehen um den Ursprung

Drehe die Punkte um den Ursprung. Positive Winkel zählen gegen den Uhrzeigersinn.

a) $P(3|1)$ um 90°
b) $Q(-2|4)$ um 90°
c) $R(5|-2)$ um 180°
d) $S(2|3)$ um 270°

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Punktspiegelung am Zentrum

Spiegle die Punkte am Zentrum $Z(1|1)$. Es gilt $P' = (2 \cdot 1 - x \,|\, 2 \cdot 1 - y)$.

a) $A(5|-3)$
b) $B(0|0)$
c) $C(-2|4)$
d) Prüfe bei A, dass Z die Mitte von AA' ist.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Welcher Kongruenzsatz?

Zwei Dreiecke stimmen in den angegebenen Größen überein. Entscheide, ob sie kongruent sind, und nenne gegebenenfalls den Satz (SSS, SWS, WSW, SsW).

a) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm
b) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm und $\gamma = 50^\circ$ (eingeschlossen)
c) $c = 7$ cm, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$
d) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 70^\circ$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Stäbe im Werkunterricht

Im Werkunterricht sollen aus drei Holzstäben Dreiecke gelegt werden. Es gilt: Die Summe zweier Seiten muss größer sein als die dritte (Dreiecksungleichung).

a) Gelingt ein Dreieck mit 3 cm, 4 cm und 8 cm?
b) Gelingt es mit 5 cm, 6 cm und 10 cm?
c) Gelingt es mit 2 cm, 2 cm und 4 cm? Was entsteht?
d) Zwei Stäbe sind 7 cm und 12 cm lang. Zwischen welchen Werten muss die dritte Seitenlänge liegen?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Symmetrie bei Verkehrsschildern

Betrachte die Formen von Verkehrsschildern und gib die Anzahl der Symmetrieachsen

und den kleinsten Drehwinkel an.

Schild (Form)	Achsen	kleinster Drehwinkel
Stoppschild (regelmäßiges Achteck)	?	?
Warnschild (gleichseitiges Dreieck)	?	?
Vorfahrtsstraße (Raute)	?	?
Rundes Gebotsschild (Kreis)	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Welche der Formen sind drehsymmetrisch, aber nicht punktsymmetrisch?
c) Wie viele Achsen hat ein regelmäßiges Zwölfeck, und wie groß ist sein kleinster Drehwinkel?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Verkettung: erst verschieben, dann spiegeln

Der Punkt $P(1|2)$ wird zuerst um $\binom{2}{1}$ verschoben und das Bild dann an der x-Achse gespiegelt.

a) Berechne das Bild P' und P''.
b) Vertausche die Reihenfolge: erst spiegeln, dann verschieben. Berechne das Ergebnis.
c) Sind die Ergebnisse gleich? Erkläre kurz, warum die Reihenfolge wichtig ist.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Zwei Spiegelungen hintereinander

Der Punkt $P(2|1)$ wird zweimal gespiegelt. Untersuche, welche Abbildung entsteht.

a) Spiegle P zuerst an der y-Achse, dann an der Geraden $x = 4$.
b) Spiegle P zuerst an der x-Achse, dann an der y-Achse.
c) Welche Abbildung ersetzt jeweils die beiden Spiegelungen?
d) Der Abstand der parallelen Achsen in a) ist 4. Wie hängt er mit der Verschiebungsweite zusammen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Schatzkarte

Piraten Kapitän Fynn plant eine Schatzsuche auf der Karte mit Koordinaten. Das Lager liegt bei $L(1|1)$. Die Anweisungen lauten:

Schritt	Anweisung
1	Verschiebe um $\binom{4}{2}$
2	Spiegle an der y-Achse
3	Drehe um 90° um den Ursprung (gegen den Uhrzeigersinn)

a) Berechne die Position nach jedem Schritt.
b) Welcher Punkt ist der Schatz?
c) Wie weit ist der Schatz vom Ursprung entfernt? (Runde auf eine Dezimale.)
d) Fynn behauptet: „Wenn ich Schritt 2 und 3 vertausche, liegt der Schatz am selben Ort.“ Prüfe.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Pflastermuster

Ein Pflastermuster entsteht, indem das Motiv M (Dreieck mit $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(1|2)$) immer wieder um den Vektor $\binom{3}{0}$ nach rechts verschoben wird. Das erste Motiv ist M_1.

a) Gib die Eckpunkte von M_2 und M_3 an.
b) Welche Koordinaten hat A im 5. Motiv?
c) Das Muster geht über 30 m (jede Einheit entspricht 1 m). Wie viele Motive passen hinein?
d) Jedes Motiv hat den Flächeninhalt $2\,\mathrm{m}^2$, ein Quadratmeter Pflaster kostet *55\,€*. Wie teuer sind alle Motive des Streifens?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Brunnen zwischen zwei Häusern

Zwei Häuser stehen bei $A(1|1)$ und $B(7|5)$ (Koordinaten in Zehnern von Metern). Ein Brunnen soll von beiden Häusern gleich weit entfernt sein, also auf der Mittelsenkrechten von AB liegen.

a) Berechne den Mittelpunkt M der Strecke AB.
b) Bestimme die Steigung von AB und die der Mittelsenkrechten (senkrecht: $m_1 \cdot m_2 = -1$).
c) Gib die Gleichung der Mittelsenkrechten an.
d) Liegt $P(2|6)$ auf der Mittelsenkrechten? Prüfe auch die Abstände zu A und B.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Dreieck konstruieren

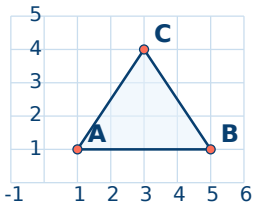
Konstruiere (gedanklich oder mit Zirkel und Lineal) ein Dreieck mit $a = 5$ cm, $b = 6$ cm und $c = 7$ cm.

a) Prüfe mit der Dreiecksungleichung, ob das Dreieck existiert.
b) Beschreibe die Konstruktion in Schritten.
c) Welcher Kongruenzsatz garantiert, dass alle Dreiecke mit diesen Maßen gleich aussehen?
d) Warum ist ein Dreieck mit $a = 5$ cm, $b = 6$ cm und $\alpha = 40°$ (gegenüber von a) nicht eindeutig?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Eine Folge von Abbildungen

Das Dreieck ABC mit $A(1|1)$, $B(5|1)$, $C(3|4)$ wird nacheinander abgebildet:
(1) Spiegelung an der y-Achse, (2) Verschiebung um $\binom{0}{-5}$, (3) Drehung um 180° um den Ursprung.

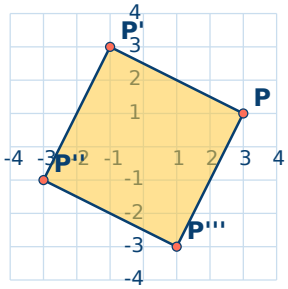


a) Berechne die Eckpunkte nach jedem Schritt.
b) Zeige, dass alle Dreiecke kongruent sind, indem du Seite AB und den Flächeninhalt vergleichst.
c) Mit welcher einzigen Abbildung kommst du direkt vom ersten zum letzten Dreieck?
d) Warum bleibt der Flächeninhalt bei jeder Kongruenzabbildung gleich?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Drehlogo

Die Designerin Selma entwirft ein Logo. Der Punkt $P(3|1)$ wird um den Ursprung dreimal um 90° gedreht. So entsteht ein Viereck.



a) Gib die Punkte P', P'' und P''' an.
b) Berechne die Länge einer Seite PP' mit dem Satz des Pythagoras.
c) Welche Figur entsteht, und wie groß ist ihr Flächeninhalt?
d) Wie viele Symmetrieachsen und welchen kleinsten Drehwinkel hat das Logo?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Die Zauberspiegel

In einem Kunstmuseum gibt es zwei Spiegel: Spiegel 1 spiegelt an der Geraden $y = x$, Spiegel 2 an der Geraden $y = -x$. Dort gilt: Spiegel 1: $(x|y) \to (y|x)$; Spiegel 2: $(x|y) \to (-y|-x)$.

Punkt	nach Spiegel 1	danach Spiegel 2
$A(2\|5)$	?	?
$B(-3\|1)$	?	?
$C(4\|-2)$	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Welche einzelne Abbildung entsteht, wenn man beide Spiegelungen hintereinander ausführt?
c) Begründe mit den Winkeln der beiden Achsen.
d) Was passiert, wenn man die Reihenfolge der Spiegel vertauscht?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Das Parallelogramm im Garten

Ein Beet hat die Form eines Parallelogramms $ABCD$ mit $AB = 8$ m, $BC = 5$ m und der Diagonalen $AC = 9$ m. Die Diagonale teilt es in die Dreiecke ABC und CDA.

a) Welche Seiten sind in einem Parallelogramm gleich lang? Gib die Längen von CD und DA an.
b) Begründe mit einem Kongruenzsatz, dass die Dreiecke ABC und CDA kongruent sind.
c) Berechne den Umfang des Beetes.
d) Die Diagonale AC wird auf 14 m verlängert. Warum ist das nicht möglich, wenn AB und BC gleich bleiben?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Die Abbildung finden

Das Dreieck ABC mit $A(1|2)$, $B(3|2)$, $C(3|5)$ wurde abgebildet.

Bild	Punkte
Bild 1	$A_1(-2\|1)$, $B_1(-2\|3)$, $C_1(-5\|3)$
Bild 2	$A_2(4\|-1)$, $B_2(6\|-1)$, $C_2(6\|2)$

a) Bestimme für Bild 1 die Abbildung und prüfe mit allen drei Punkten.
b) Bestimme für Bild 2 die Abbildung und den Vektor.
c) Begründe, warum beide Bilder zum Urbild kongruent sind.
d) Erkläre, wie du erkennst, ob es eine Drehung oder eine Spiegelung ist.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Kommt es auf die Reihenfolge an?

Der Punkt $P(2|1)$ wird mit den Abbildungen V: Verschiebung um $\binom{1}{0}$ und D: Drehung um 90° um den Ursprung bearbeitet.

a) Führe zuerst V, dann D aus.

b) Führe zuerst D, dann V aus.
c) Ändert sich etwas, wenn du zwei Verschiebungen vertauschst? Begründe allgemein.
d) Gib zwei Spiegelungen an, bei denen die Reihenfolge egal ist.