Lösungen - Geometrische Konstruktionen und Abbildungen

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) A: $(2|-3)$ und $(-2|3)$; B: $(-4|-1)$ und $(4|1)$; C: $(5|2)$ und $(-5|-2)$.
b) Bei der Spiegelung an der x-Achse bleibt x gleich, bei der Spiegelung an der y-Achse bleibt y gleich.
c) $D'(0|4) = D$: Punkte auf der Spiegelachse sind Fixpunkte.
Bei einer Achsenspiegelung bleibt immer die Koordinate in Richtung der Achse erhalten, die andere wechselt ihr Vorzeichen. Punkte, die auf der Spiegelachse liegen, werden auf sich selbst abgebildet. Man nennt sie Fixpunkte.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Abstand 2 rechts der Achse, also $P'(1|2)$.
b) Abstand 4 links der Achse, also $Q'(7|4)$.
c) Abstand 4 über der Achse, also $R'(2|-5)$.
d) Abstand 2 unter der Achse, also $S'(4|1)$.
Bei einer Spiegelung an einer senkrechten Geraden $x = c$ bleibt der y-Wert gleich, und der Punkt landet im selben Abstand auf der anderen Seite. Formel: $x' = 2c - x$. Bei einer waagerechten Achse $y = c$ gilt entsprechend $y' = 2c - y$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $P'(4|2)$.
b) $Q'(1|-2)$.
c) $R'(6|-5)$.
d) $\binom{6-2}{1-4} = \binom{4}{-3}$.
Bei einer Verschiebung werden die Koordinaten des Vektors einfach zu denen des Punktes addiert. Umgekehrt erhält man den Vektor, indem man vom Bildpunkt den Urpunkt subtrahiert, also „Spitze minus Fuß“.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $(x|y) \to (-y|x)$: $P'(-1|3)$.
b) $Q'(-4|-2)$.
c) $(x|y) \to (-x|-y)$: $R'(-5|2)$.
d) $(x|y) \to (y|-x)$: $S'(3|-2)$.
Die Merkregeln für Drehungen um den Ursprung lauten: $90°$: $(x|y) \to (-y|x)$; $180°$: $(x|y) \to (-x|-y)$; $270°$: $(x|y) \to (y|-x)$. Zur Kontrolle kann man die Punkte ins Koordinatensystem zeichnen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $A'(2-5\,|\,2+3) = (-3|5)$.
b) $B'(2|2)$.
c) $C'(2+2\,|\,2-4) = (4|-2)$.
d) Mitte von $A(5|-3)$ und $A'(-3|5)$: $(\frac{5-3}{2}\,|\,\frac{-3+5}{2}) = (1|1) = Z$.
Bei einer Punktspiegelung ist das Zentrum genau die Mitte zwischen Punkt und Bildpunkt. Daraus folgt die Formel $P' = (2z_1 - x\,|\,2z_2 - y)$. Eine Punktspiegelung ist dasselbe wie eine Drehung um 180° um das Zentrum.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Ja, SSS: alle drei Seiten stimmen überein.
b) Ja, SWS: zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.
c) Ja, WSW: eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (der dritte Winkel ist 70°).
d) Nein: Drei gleiche Winkel genügen nicht, die Dreiecke können verschieden groß sein (nur ähnlich).
Ein Kongruenzsatz garantiert, dass die gegebenen Größen ein Dreieck eindeutig festlegen. Bei drei Winkeln ist nur die Form festgelegt, nicht die Größe. Solche Dreiecke heißen ähnlich, sie können aber verschieden groß sein.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Nein: $3 + 4 = 7$.
b) Ja: $5 + 6 = 11 > 10$, außerdem $5 + 10 > 6$ und $6 + 10 > 5$.
c) Nein: $2 + 2 = 4$ ist nicht größer als 4. Die Stäbe liegen auf einer Geraden, das Dreieck „klappt zu“.
d) $12 - 7$, also 5 cm.
Antwort: Nur mit den Stäben aus b) entsteht ein Dreieck. Zwei Stäbe mit 7 cm und 12 cm lassen sich mit jedem dritten Stab kombinieren, der länger als 5 cm und kürzer als 19 cm ist.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Achteck: 8 Achsen, 45°; Dreieck: 3 Achsen, 120°; Raute: 2 Achsen, 180°; Kreis: unendlich viele Achsen, jeder Winkel.
b) Das gleichseitige Dreieck (Drehung um 120°, aber keine Punktspiegelung).
c) 12 Achsen und $360^\circ : 12 = 30^\circ$.
Eine Figur ist punktsymmetrisch, wenn sie bei einer Drehung um 180° auf sich selbst fällt. Beim gleichseitigen Dreieck klappt das nicht, weil eine Spitze nach der Drehung nach unten zeigt. Regelmäßige n-Ecke haben n Achsen und den kleinsten Drehwinkel $360^\circ : n$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Verschieben: $P'(3|3)$; Spiegeln: $P''(3|-3)$.

b) Spiegeln: $(1|-2)$; Verschieben: $(3|-1)$.
c) Nein: $(3|-3) \neq (3|-1)$. Die Verschiebung ändert y, und die Spiegelung an der x-Achse wirkt auf den y-Wert; deshalb ist die Reihenfolge wichtig.
Antwort: Die Ergebnisse unterscheiden sich, also kommt es bei verketteten Abbildungen auf die Reihenfolge an. Man muss die Schritte daher genau in der angegebenen Reihenfolge ausführen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $P'(-2|1)$; Abstand zu $x=4$ ist 6, also $P''(10|1)$.
b) $P'(2|-1)$, dann $P''(-2|-1)$.
c) a) Verschiebung um $\binom{8}{0}$; b) Drehung um 180° um den Ursprung (Schnittpunkt der Achsen).
d) Die Verschiebung ist doppelt so weit wie der Abstand der Achsen: $2 \cdot 4 = 8$.
Antwort: Zwei Spiegelungen an parallelen Achsen ergeben eine Verschiebung um den doppelten Achsenabstand. Zwei Spiegelungen an senkrecht aufeinander stehenden Achsen ergeben eine Drehung um 180° um den Schnittpunkt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Nach 1: $(5|3)$; nach 2: $(-5|3)$; nach 3: $(-3|-5)$.
b) Der Schatz liegt bei $(-3|-5)$.
c) $\sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}8$ Längeneinheiten.
d) Erst drehen: $(5|3) \to (-3|5)$, dann an der y-Achse spiegeln: $(3|5)$. Das ist ein anderer Ort, die Reihenfolge ist wichtig.
Antwort: Der Schatz liegt bei $(-3|-5)$, etwa 5,8 Einheiten vom Ursprung entfernt. Fynn irrt sich, denn mit vertauschten Schritten landet man bei $(3|5)$. Die Entfernung zum Ursprung ist zwar dieselbe, der Ort aber nicht.

Lösung zu Aufgabe 12

a) M_2: $(3|0), (5|0), (4|2)$; M_3: $(6|0), (8|0), (7|2)$.
b) $A_5 = (4 \cdot 3 \,|\, 0) = (12|0)$.
c) $30 : 3 = 10$ Motive.
d) $10 \cdot 2 = 20\,\mathrm{m}^2$, Kosten *20\cdot55=1100\,€*.
Jedes Motiv entsteht aus dem vorherigen durch dieselbe Verschiebung. Das n-te Motiv ist daher um $(n-1) \cdot 3$ Einheiten nach rechts verschoben. Antwort: 10 Motive mit zusammen 20 m² kosten 1100 €.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $M = (\frac{1+7}{2} | \frac{1+5}{2}) = (4|3)$.
b) $m_{AB} = \frac{5-1}{7-1} = \frac{2}{3}$; Mittelsenkrechte: $m = -\frac{3}{2} = -1{,}5$.
c) $y = -1{,}5x + b$ mit M: $3 = -6 + b$, also $b = 9$: $y = -1{,}5x + 9$.
d) $-1{,}5 \cdot 2 + 9 = 6$: ja. Abstände: $PA = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$, $PB = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$. Gleich.

Antwort: Die Mittelsenkrechte hat die Gleichung $y = -1{,}5x + 9$. Der Punkt $P(2|6)$ liegt darauf und ist von beiden Häusern $\sqrt{26} \approx 5{,}1$ Einheiten, also etwa 51 m, entfernt. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten wäre ein geeigneter Brunnenplatz.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $5 + 6 > 7$, $5 + 7 > 6$, $6 + 7 > 5$: es existiert.
b) Zeichne $c = 7$ cm; Kreisbogen um A mit $b = 6$ cm; Kreisbogen um B mit $a = 5$ cm; der Schnittpunkt ist C.
c) SSS.
d) Die Kombination (zwei Seiten, Winkel gegenüber der kürzeren Seite) kann zwei Dreiecke liefern, weil der Kreisbogen die Gerade in zwei Punkten schneiden kann. Der Winkel liegt hier der kürzeren Seite gegenüber, SsW verlangt die längere.
Antwort: Das Dreieck mit 5 cm, 6 cm und 7 cm existiert und ist nach SSS eindeutig konstruierbar. Liegt dagegen der gegebene Winkel der kürzeren Seite gegenüber, kann es zwei verschiedene Dreiecke geben.

Lösung zu Aufgabe 15

a) (1): $A_1(-1|1)$, $B_1(-5|1)$, $C_1(-3|4)$. (2): $A_2(-1|-4)$, $B_2(-5|-4)$, $C_2(-3|-1)$. (3): $A_3(1|4)$, $B_3(5|4)$, $C_3(3|1)$.
b) $AB = 4$ und $A_3B_3 = 4$; Fläche $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ bei beiden (Höhe 3).
c) Spiegelung an der Geraden $y = 2{,}5$: $A(1|1) \to (1|4)$, $C(3|4) \to (3|1)$.
d) Kongruenzabbildungen verändern weder Längen noch Winkel, daher auch nicht die Fläche.
Antwort: Alle vier Dreiecke sind kongruent mit dem Flächeninhalt 6. Die drei Abbildungen zusammen wirken wie eine einzige Spiegelung an der Geraden $y = 2{,}5$. Man erkennt das daran, dass sich der Umlaufsinn geändert hat.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $P'(-1|3)$, $P''(-3|-1)$, $P'''(1|-3)$.
b) $PP' = \sqrt{(3+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
c) Ein Quadrat mit der Seite $\sqrt{20}$: $A = 20$ Flächeneinheiten.
d) Vier Achsen und der kleinste Drehwinkel 90° (Quadrat).
Antwort: Das Logo ist ein Quadrat mit 20 Flächeneinheiten. Das liegt daran, dass eine Drehung um 90° Längen erhält und die Verbindungsstrecken senkrecht aufeinander stehen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) A: $(5|2) \to (-2|-5)$; B: $(1|-3) \to (3|-1)$; C: $(-2|4) \to (-4|2)$.
b) $(x|y) \to (-x|-y)$: Punktspiegelung am Ursprung, also Drehung um 180°.
c) Die Achsen schneiden sich im Ursprung unter 90°; zwei Spiegelungen an sich schneidenden Achsen ergeben eine Drehung um den doppelten Winkel 180°.

d) Wieder $(x|y) \to (-x|-y)$: Das Ergebnis ist dasselbe, weil die Achsen senkrecht aufeinander stehen.
Antwort: Beide Spiegelungen zusammen ergeben eine Punktspiegelung am Ursprung. Hier ist die Reihenfolge ausnahmsweise egal, weil die beiden Achsen senkrecht zueinander stehen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang: $CD = 8$ m, $DA = 5$ m.
b) $AB = CD$, $BC = DA$ und AC gemeinsam: SSS, die Dreiecke sind kongruent.
c) $2 \cdot (8 + 5) = 26$ m.
d) Dreiecksungleichung: $8 + 5 = 13$. Ein Dreieck mit 8, 5 und 14 existiert nicht.
Antwort: Das Beet hat einen Umfang von 26 m. Die Diagonale zerlegt jedes Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke; eine Diagonale von 14 m ist bei diesen Seiten unmöglich.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Drehung um den Ursprung um $90°$: $(x|y) \to (-y|x)$; $(1|2) \to (-2|1)$, $(3|2) \to (-2|3)$, $(3|5) \to (-5|3)$. Alle Punkte passen.
b) Verschiebung um $\binom{3}{-3}$: $A \to (4|-1)$, $B \to (6|-1)$, $C \to (6|2)$.
c) Drehung und Verschiebung sind Kongruenzabbildungen: Längen und Winkel bleiben erhalten.
d) Bei einer Spiegelung ändert sich der Umlaufsinn (die Reihenfolge A, B, C läuft andersherum), bei Drehung und Verschiebung bleibt er gleich.
Antwort: Bild 1 entsteht durch eine Drehung um $90°$ um den Ursprung, Bild 2 durch eine Verschiebung um $\binom{3}{-3}$. Beide Bilder sind deckungsgleich mit dem Urbild.

Lösung zu Aufgabe 20

a) V: $(3|1)$; D: $(-1|3)$.
b) D: $(-1|2)$; V: $(0|2)$.
c) Nein, denn $(x + a + c \,|\, y + b + d)$ kommt in beiden Reihenfolgen heraus (Vektoren addieren sich).
d) Die Spiegelungen an der x-Achse und an der y-Achse: $(x|y) \to (x|-y) \to (-x|-y)$ und umgekehrt $(x|y) \to (-x|y) \to (-x|-y)$.
Antwort: Bei Verschiebung und Drehung ist die Reihenfolge wichtig, bei zwei Verschiebungen und bei Spiegelungen an zwei senkrechten Achsen dagegen nicht. Solche Abbildungen nennt man vertauschbar.