Lernzettel - Bruchterme und Bruchgleichungen

Klasse: Klasse 8

Bruchterme sind Brüche mit Variablen. Du rechnest mit ihnen wie mit gewöhnlichen Brüchen, musst aber darauf achten, dass der Nenner nie null wird.

Einstieg: Wer zahlt wie viel?

Die Klasse 8b sammelt für ein Abschiedsgeschenk. Es kostet *120\,€*, und jeder zahlt gleich viel. Bei 24 Schülerinnen und Schülern sind das *120:24=5\,€* pro Person. Kommen 6 weitere Zahlende dazu, sinkt der Beitrag auf *4\,€*. Der Beitrag hängt also von der Zahl der Zahlenden x ab: $\frac{120}{x}$. Das ist ein Bruchterm, denn im Nenner steht eine Variable. Solche Terme beschreiben viele Alltagssituationen, bei denen etwas auf mehrere Personen oder Stunden verteilt wird. Gleichzeitig zeigt das Beispiel, dass $x = 0$ sinnlos ist: Ohne Zahlende kann man nicht teilen. Genau diese Vorsicht ist das Wichtigste in diesem Kapitel.

Bruchterm und Definitionsmenge

Definition: Bruchterm

Ein **Bruchterm** ist ein Bruch, bei dem im Zähler, im Nenner oder in beiden eine Variable vorkommt, zum Beispiel $\frac{3}{x}$ oder $\frac{x+2}{x^2-9}$.

Definition: Definitionsmenge

Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ enthält alle Zahlen, die du einsetzen darfst. Du bestimmst sie, indem du den Nenner gleich null setzt und diese Zahlen ausschließt.

Merke: Nie durch null

Durch null darf man nicht teilen. Notiere die Definitionsmenge immer zuerst.

Beispiel 1: Definitionsmenge

Bestimme die Definitionsmenge von $\frac{5}{x-2}$ und von $\frac{x}{x^2-9}$.

$x - 2 = 0$ für $x = 2$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$.

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = 0$ für $x = 3$ und $x = -3$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$.

Kürzen und Erweitern

Regel: Kürzen

Du kürzt, indem du Zähler und Nenner durch denselben **Faktor** teilst. Kürzen darfst du nur Faktoren, niemals Summanden.

Beim **Erweitern** multiplizierst du Zähler und Nenner mit demselben Term (nicht null). Das brauchst du für den Hauptnenner: $\frac{3}{x} = \frac{3(x+1)}{x(x+1)}$.

So gehst du vor: Kürzen

1. Faktorisiere Zähler und Nenner, durch Ausklammern oder mit den binomischen Formeln.
2. Bestimme die Definitionsmenge am ursprünglichen Nenner.
3. Kürze gleiche Faktoren in Zähler und Nenner.

Beispiel 2: Dritte Formel nutzen

Kürze $\frac{x^2-9}{x+3}$**.**

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3 \text{ für } x \neq -3.$$

Beispiel 3: Ausklammern und Formel

Kürze $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$**.**

$$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x} \text{ für } x \neq 0 \text{ und } x \neq 2.$$

Achtung

Aus Summen wird nicht gekürzt: $\frac{x+3}{3}$ ist nicht $x+1$. Nur was mit Mal verbunden ist, darfst du kürzen.

Multiplizieren und Dividieren

Regel: Multiplikation und Division

Brüche werden multipliziert, indem du Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizierst. Dividiert wird mit dem Kehrbruch. Kürze am besten vor dem

Ausmultiplizieren.

Beispiel 4: Division

Berechne $\frac{3}{x} : \frac{6}{x^2}$.

$\frac{3}{x} \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{3x^2}{6x} = \frac{x}{2}$ für $x \neq 0$.

Addieren und Subtrahieren

So gehst du vor: Hauptnenner bilden

1. Faktorisiere alle Nenner.
2. Bilde das kleinste gemeinsame Vielfache als Hauptnenner.
3. Erweitere jeden Bruch auf den Hauptnenner.
4. Addiere oder subtrahiere die Zähler und behalte den Nenner.
5. Setze beim Subtrahieren den zweiten Zähler in Klammern.

Beispiel 5: Subtraktion

Berechne $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$.

$\frac{3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+3-2x+2}{x^2-1} = \frac{x+5}{x^2-1}$.

Das Minus wirkt auf beide Glieder der zweiten Klammer.

Beispiel 6: Hauptnenner

Fasse $\frac{1}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$ zusammen.

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$. Der zweite Nenner steckt schon im ersten, der Hauptnenner ist $(x+2)(x-2)$.

Erweitere den zweiten Bruch mit $(x-2)$: $\frac{1+3(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x-5}{x^2-4}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$.

Bruchgleichungen

Definition: Bruchgleichung

In einer **Bruchgleichung** steht die Unbekannte im Nenner.

So gehst du vor: Bruchgleichung lösen

1. Bestimme die Definitionsmenge: Welche Zahlen machen einen Nenner null?
2. Bestimme den Hauptnenner aller Brüche.
3. Multipliziere die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner, bis keine Brüche mehr da sind.
4. Löse die entstandene Gleichung.
5. Prüfe, ob die Lösung in der Definitionsmenge liegt, und mache die Probe.

Beispiel 7: Bruchgleichung

Löse $\frac{3}{x-1} = \frac{6}{x+2}$.

$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1; -2\}$. Multiplikation mit $(x-1)(x+2)$: $3(x+2) = 6(x-1)$, also $3x + 6 = 6x - 6$ und $x = 4$.

Probe: $\frac{3}{3} = 1$ und $\frac{6}{6} = 1$. Die Lösung ist $x = 4$.

Beispiel 8: Keine Lösung

Löse $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$.

Es ist $x \neq 3$. Multiplikation mit $x - 3$ ergibt $x = 3$.

Diese Zahl gehört nicht zur Definitionsmenge. Also $L = \{\}$.

Beispiel 9: Gemischte Aufgabe

Löse $\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = 1$.

$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Hauptnenner $3x$: $6 + x = 3x$, also $x = 3$.

Probe: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Stimmt.

Beispiel 10: Arbeitsaufgabe

Pumpe A füllt ein Becken in 4 Stunden, Pumpe B in 12 Stunden. Wie lange brauchen beide zusammen?

Pro Stunde füllt A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{12}$. Zusammen $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ des Beckens.

Sie brauchen 3 Stunden.

Hinweis

Beim Kürzen und Erweitern ändert sich der Wert nur in der Schreibweise. Die Definitionsmenge des Ausgangsterms bleibt bestehen, auch wenn der gekürzte Term

mehr Zahlen erlaubt: $\frac{x^2-9}{x+3} = x - 3$ gilt nur für $x \neq -3$. Bruchterme begegnen dir bei $v = \frac{s}{t}$, beim Preis pro Stück und bei Arbeitsaufgaben.

Bruchterme im Alltag

Viele Größen sind Quotienten: Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$, Dichte $\rho = \frac{m}{V}$, Stückpreis $= \frac{\text{Gesamtkosten}}{\text{Anzahl}}$. Sobald die Anzahl oder die Zeit eine Variable ist, entsteht ein Bruchterm. Dabei ist die Definitionsmenge nicht nur eine mathematische Vorsichtsmaßnahme, sondern hat Sinn: Eine Anzahl von 0 Stück oder eine Zeit von 0 Stunden führt zu keinem sinnvollen Wert.

Beispiel 11: Stückkosten

Ein Verein druckt x T-Shirts. Die Druckvorlage kostet *60\,€*, jedes Shirt *4\,€*. Wie hoch sind die Stückkosten bei 30 und bei 120 Shirts?

Der Term für die Stückkosten ist $\frac{60+4x}{x} = \frac{60}{x} + 4$. Bei $x = 30$: *\frac{60+120}{30}=6\,€*. Bei $x = 120$: *\frac{60+480}{120}=4{,}50\,€*. Je mehr Shirts, desto näher kommen die Stückkosten an *4\,€*.

Mehrere Brüche in einer Gleichung

In einer Bruchgleichung steht die Unbekannte mindestens einmal im Nenner. Das Lösungsschema bleibt immer gleich: Erst $\mathbb{D}$, dann Hauptnenner, dann alle Glieder damit multiplizieren, lösen und prüfen. Vergiss beim Multiplizieren nicht die Zahlen ohne Bruch: Auch 1 oder 3 muss mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Bei Gleichungen der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ kannst du kreuzweise multiplizieren: $ad = bc$.

Beispiel 12: Mit Zahl ohne Bruch

Löse $\frac{6}{x} + 2 = \frac{10}{x}$.

$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Hauptnenner x: $6 + 2x = 10$, also $2x = 4$ und $x = 2$. Probe: $\frac{6}{2} + 2 = 5$ und $\frac{10}{2} = 5$. Die Zahl 2 wurde auf der linken Seite ebenfalls mit x multipliziert.

Beispiel 13: Gemeinsame Arbeit

Zwei Bagger heben eine Baugrube aus. Bagger A schafft es allein in 8 Tagen, Bagger B in 24 Tagen. Wie lange brauchen beide gemeinsam?

Pro Tag schafft A $\frac{1}{8}$, B $\frac{1}{24}$. Zusammen: $\frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Sie brauchen also 6 Tage. Allgemein gilt: Bei a und b Tagen allein ist die gemeinsame Zeit $\frac{ab}{a+b}$.

Probe und Kontrolle

Jede Bruchgleichung kannst du durch Einsetzen kontrollieren. Das lohnt sich besonders,

wenn du mit einem Term multiplizierst hast, der null sein kann. Eine solche Multiplikation ist keine Äquivalenzumformung, sie kann Scheinlösungen erzeugen. Deshalb gehört der Vergleich mit $\mathbb{D}$ immer dazu. Hast du am Ende eine Lösung gefunden, die nicht in $\mathbb{D}$ liegt, schreibst du $L = \{\}$.

Beispiel 14: Zwei Nenner mit Formel

Löse $\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$**.**

Es ist $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, also $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$. Hauptnenner $(x+2)(x-2)$: $x(x-2) - 4 = (x+2)(x-2)$. Ausmultipliziert: $x^2 - 2x - 4 = x^2 - 4$. Das x^2 fällt weg: $-2x = 0$, also $x = 0$. Probe: $0 - \frac{4}{-4} = 1$. Stimmt, und $0 \in \mathbb{D}$.

Achtung: Zwei typische Fehler

Erstens: Beim Subtrahieren von Brüchen setzt du den zweiten Zähler in Klammern, sonst wirkt das Minus nur auf das erste Glied. Zweitens: Beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner muss jedes Glied der Gleichung multipliziert werden, auch Zahlen ohne Bruch.

Wusstest du?

Die alten Ägypter schrieben fast alle Brüche als Summe von Stammbrüchen, also $\frac{1}{n}$. Statt $\frac{3}{4}$ schrieben sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Auch heute begegnet dir diese Idee bei Arbeitsaufgaben: Wer $\frac{1}{4}$ einer Arbeit in einer Stunde schafft, braucht für alles vier Stunden. Die Parallelschaltung in der Physik arbeitet mit $\frac{1}{R}$ – ebenfalls mit Kehrwerten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Bruchterm: Bruch mit einer Variablen im Zähler oder Nenner, der Nenner darf nie null sein.
- Definitionsmenge: alle Zahlen außer den Nullstellen des Nenners, immer zuerst aufschreiben.
- Kürzen darfst du nur Faktoren, nie Summanden: $\frac{x+3}{3}$ bleibt stehen.
- Multiplizieren: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner; Dividieren heißt mit dem Kehrbruch multiplizieren.
- Addieren und Subtrahieren: Nenner faktorisieren, Hauptnenner bilden, erweitern, Zähler zusammenfassen.
- Bruchgleichung: $\mathbb{D}$ bestimmen, mit dem Hauptnenner multiplizieren, lösen, Lösung gegen $\mathbb{D}$ prüfen.
- Alltag: Stückkosten, Geschwindigkeit und gemeinsame Arbeit führen auf Bruchterme.
- Lösungen außerhalb der Definitionsmenge werden verworfen.

Achtung

Häufige Fehler: Definitionsmenge vergessen und eine unerlaubte Lösung angeben, beim Hauptnenner nicht faktorisieren, beim Subtrahieren die Klammer vergessen, beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner nicht alle Glieder erwischen.

Vertiefung: Sicher mit Bruchtermen rechnen

So gehst du vor: Eine Bruchgleichung vollständig lösen

1. Bestimme zuerst die Definitionsmenge: Setze jeden Nenner gleich null und schließe diese Zahlen aus.
2. Faktorisiere die Nenner, falls möglich, und bestimme den Hauptnenner.
3. Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner. Danach stehen keine Brüche mehr da.
4. Löse die entstandene Gleichung wie gewohnt.
5. Prüfe, ob die Lösung in der Definitionsmenge liegt. Eine ausgeschlossene Zahl ist keine Lösung, auch wenn sie rechnerisch herauskommt.
6. Mache die Probe in der Ausgangsgleichung und gib die Lösungsmenge an.

Beispiel: Eine Scheinlösung erkennen

Löse $\frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1}$.

Der Nenner wird für $x = 1$ null, also gilt $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Multipliziert man beide Seiten mit $x - 1$, erhält man $2x = 2$ und damit $x = 1$. Diese Zahl ist aber ausgeschlossen, denn eingesetzt würde man durch null teilen. Die Gleichung hat deshalb keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$. Wer die Definitionsmenge vergisst, gibt hier eine falsche Antwort.

Schon gewusst?

Bruchgleichungen begegnen dir in Physik und Technik ständig. Die Linsengleichung der Optik, $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$, verbindet Brennweite, Gegenstandsweite und Bildweite einer Lupe oder Kamera. Dieselbe Form hat die Formel für parallel geschaltete Widerstände. Auch bei Aufgaben zur gemeinsamen Arbeit, etwa wenn zwei Pumpen ein Becken füllen, entstehen Bruchgleichungen, weil man die Leistung pro Stunde als Kehrwert der Zeit schreibt. Wer Bruchgleichungen sicher beherrscht, hat also ein Werkzeug für viele Fächer.

Hinweis: Kürzen nur bei Produkten

Ein Bruchterm darf nur gekürzt werden, wenn Zähler und Nenner als Produkte geschrieben sind. Faktorisiere deshalb zuerst durch Ausklammern oder mit den binomischen Formeln und kürze erst danach gemeinsame Faktoren.

Ottos Tipp

Schreibe die Definitionsmenge immer als Erstes auf. Dann rutscht dir am Ende keine falsche Lösung durch. Und kürzen darfst du nur, was mit Mal verbunden ist.