Arbeitsblatt - Bruchterme und Bruchgleichungen

Klasse: Klasse 8 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Wann darf ich einsetzen?

Bestimme jeweils die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ in der Grundmenge $\mathbb{Q}$. Setze dazu den Nenner gleich null.

a) $\frac{5}{x}$

b) $\frac{3}{x-4}$

c) $\frac{x+1}{2x-6}$

d) $\frac{7}{x^2-25}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Kürzen

Faktorisiere Zähler und Nenner und kürze. Gib die Definitionsmenge des ursprünglichen Terms an.

a) $\frac{6x}{9x^2}$

b) $\frac{4x+8}{x+2}$

c) $\frac{x^2-9}{x+3}$

d) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Erweitern auf den Hauptnenner

Erweitere die Brüche so, dass beide denselben Nenner haben, und schreibe den Hauptnenner auf.

a) $\frac{3}{x}$ und $\frac{2}{x+1}$

b) $\frac{1}{x-1}$ und $\frac{4}{x+2}$
c) $\frac{5}{2x}$ und $\frac{1}{3x}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Multiplizieren

Multipliziere und kürze so weit wie möglich. Kürze am besten vor dem Ausmultiplizieren.

a) $\frac{3x}{4} \cdot \frac{8}{x^2}$
b) $\frac{2}{x} \cdot \frac{x^2}{6}$
c) $\frac{x-2}{5} \cdot \frac{10}{x^2-4}$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Dividieren

Dividiere, indem du mit dem Kehrbruch multiplizierst. Gib an, welche Zahlen ausgeschlossen sind.

a) $\frac{4}{x} : \frac{8}{x^2}$
b) $\frac{x+1}{3} : \frac{x+1}{6}$
c) $\frac{x^2-1}{x} : \frac{x+1}{x^2}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Addieren und Subtrahieren

Fasse zu einem einzigen Bruch zusammen und vereinfache.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x}$
b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$
c) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}$
d) $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Einfache Bruchgleichungen

Bestimme zuerst die Definitionsmenge, multipliziere mit dem Hauptnenner und löse. Mache die Probe.

a) $\frac{3}{x} = 6$

b) $\frac{4}{x+1} = 2$

c) $\frac{5}{x} = \frac{10}{x+3}$

d) $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+2}$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Gemeinsam streichen

Anna streicht ein Zimmer allein in 4 Stunden, ihr Bruder Ben braucht allein 6 Stunden.

a) Welchen Bruchteil des Zimmers schafft jeder in einer Stunde?
b) Welchen Bruchteil schaffen beide zusammen in einer Stunde?
c) Wie lange brauchen sie gemeinsam? Gib das Ergebnis in Stunden und Minuten an.
d) Wie lange brauchen sie, wenn Ben sich mit einem Freund (ebenfalls 6 Stunden allein) Hilfe holt und Anna fehlt?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Geschenkkasse

Die Klasse 8b will ihrer Lehrerin zum Abschied ein Geschenk für *120*\,€ kaufen. Jede Schülerin und jeder Schüler zahlt den gleichen Betrag. Bei x Zahlenden ist der Beitrag $\frac{120}{x}$ Euro.

a) Berechne den Beitrag bei 24 Zahlenden.
b) Wie viele müssen zahlen, wenn jeder genau *4*\,€ geben soll?
c) Wie viele Zahlende braucht man, damit jeder höchstens *3*\,€ zahlt?
d) Warum darf x nicht 0 sein, und wie verändert sich der Beitrag, wenn x größer wird?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Hin und zurück

Familie Kaya fährt 120 km zu den Großeltern. Hin fahren sie im Schnitt 60 km/h, zurück wegen Stau nur 40 km/h.

a) Berechne die Fahrzeit für Hin- und Rückfahrt.
b) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit der ganzen Fahrt.
c) Warum ist sie nicht 50 km/h? Erkläre mit einem Satz.

d) Allgemein: Gib die Durchschnittsgeschwindigkeit bei Strecke s und Geschwindigkeiten a und b als Bruchterm an und vereinfache.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Handytarif

Der Tarif „Smart“ kostet *5\,€* Grundgebühr plus *0{,}04\,€* pro Minute. Bei x Gesprächsminuten ist der Durchschnittspreis pro Minute $\dfrac{5+0{,}04x}{x}$ Euro.

a) Berechne den Durchschnittspreis pro Minute für 100 und für 500 Minuten.
b) Bei wie vielen Minuten beträgt der Durchschnittspreis genau *0{,}06\,€*?
c) Warum liegt der Durchschnittspreis immer über *0{,}04\,€*?
d) Wie lautet die Definitionsmenge dieses Terms im Sachzusammenhang?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Schulweg

Mia radelt 6 km zur Schule. Bei einer Geschwindigkeit von v km/h braucht sie $\dfrac{6}{v}$ Stunden.

a) Wie lange braucht sie bei $v = 12$ km/h? Gib das Ergebnis in Minuten an.
b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste sie fahren, um in 20 Minuten anzukommen?
c) Mit einem E-Bike wäre sie 4 km/h schneller. Fasse die Zeitersparnis $\dfrac{6}{v} - \dfrac{6}{v+4}$ zu einem Bruch zusammen.
d) Berechne die Zeitersparnis für $v = 12$ und gib sie in Minuten an.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Wer hat recht?

Drei Schüler kürzen Terme und bekommen verschiedene Ergebnisse:

Tim: $\dfrac{x+3}{3} = x+1$

Lea: $\dfrac{6x+9}{3} = 2x+3$

Mia: $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$

a) Prüfe Tims Rechnung mit dem Einsetzen von $x = 6$.
b) Begründe, warum Lea recht hat.
c) Warum stimmt Mias Ergebnis nur für $x \neq 2$?
d) Formuliere die Regel, welche Teile man kürzen darf.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Hauptnenner mit Faktorisieren

Faktorisiere die Nenner, bestimme den Hauptnenner und fasse zusammen.

a) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$

b) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Gleichungen mit Brüchen

Löse. Bestimme zuerst $\mathbb{D}$ und multipliziere mit dem Hauptnenner.

a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{3}=1$

b) $\frac{3}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$

c) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=3$

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Schwimmbecken im Freibad

Im Freibad „Sonnenbad“ wird das Becken ($600\,\mathrm{m}^3$) mit zwei Zuläufen gefüllt. Zulauf A schafft es allein in 10 Stunden, Zulauf B in 15 Stunden. Ein Abfluss C würde das volle Becken in 30 Stunden leeren.

Rohr	Zeit allein	Bruchteil pro Stunde
Zulauf A	10 h	?
Zulauf B	15 h	?
Abfluss C	30 h	?

a) Ergänze die Tabelle.

b) Wie lange dauert das Füllen, wenn nur A und B laufen?

c) Wie lange dauert es, wenn der Abfluss C versehentlich offen bleibt?

d) Wie viele m^3 fließen dann pro Stunde netto ins Becken?

e) Warum muss die Rechnung mit Bruchteilen pro Stunde erfolgen, nicht mit den Zeiten?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Die Stückkosten beim Schulfest

Die Klasse 8a backt Kuchen für das Schulfest. Für Zutaten und Material fallen *40\,€* fest an, jeder Kuchen kostet zusätzlich *0{,}50\,€*. Bei x Kuchen sind die Stückkosten $\frac{40 + 0{,}5x}{x}$ Euro.

Kuchen	20	50	100	200
Stückkosten	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Ab wie vielen Kuchen sind die Stückkosten höchstens *1{,}00\,€*?
c) Ab wie vielen Kuchen liegen sie unter *0{,}80\,€*?
d) Die Kuchen werden für *1{,}20\,€* das Stück verkauft. Ab wie vielen verkauften Kuchen macht die Klasse Gewinn?
e) Gib an, welchem Wert sich die Stückkosten bei sehr vielen Kuchen nähern, und begründe.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Lichterkette

Bei einer Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 gilt für den Gesamtwiderstand R die Gleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (alle Werte in Ohm). Für eine Lichterkette der Klasse 8c werden Bauteile zusammengeschaltet.

Fall	R1	R2	R
A	6	12	?
B	6	?	3
C	10	10	?

a) Berechne den Gesamtwiderstand in Fall A.
b) Bestimme R_2 in Fall B mit Hilfe einer Bruchgleichung.
c) Berechne R in Fall C und formuliere eine Regel für zwei gleiche Widerstände.
d) Löse die Formel allgemein nach R auf: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Zahlenrätsel mit Bruch

Ein Bruch hat im Nenner die Zahl x. Der Zähler ist um 2 kleiner als der Nenner. Addiert man zum Zähler und zum Nenner jeweils 1, erhält man den Wert $\frac{4}{5}$.

a) Stelle die Gleichung $\frac{x - 2 + 1}{x + 1} = \frac{4}{5}$ auf und bestimme $\mathbb{D}$.

b) Löse die Gleichung.
c) Wie heißt der ursprüngliche Bruch? Mache die Probe.
d) Zeige allgemein: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$, und berechne den Wert für $x = 9$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Der Fehler im Beweis

Ein Schüler „beweist“ $1 = 2$:
Sei $a = b$. Dann $a^2 = ab$, also $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Faktorisiert: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$.
Kürzt man $(a-b)$, folgt $a + b = b$, also $2b = b$ und $2 = 1$.

a) Welche Schritte sind richtig?
b) Wo steckt der Fehler? Begründe mit der Definitionsmenge.
c) Setze $a = b = 3$ ein und zeige, dass beim Kürzen durch null geteilt wird.
d) Formuliere eine Regel, die solche Fehler verhindert.