Lösungen - Bruchterme und Bruchgleichungen

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x = 0$ ist verboten: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
b) $x - 4 = 0$ für $x = 4$: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$.
c) $2x - 6 = 0$ für $x = 3$: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$.
d) $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5) = 0$ für $x = \pm 5$: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-5; 5\}$.
Merke: Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, die man einsetzen darf. Ausgeschlossen werden genau die Zahlen, für die ein Nenner null wird, denn durch null kann man nicht teilen. Bei d) hilft die dritte binomische Formel, um beide Nullstellen des Nenners zu finden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\frac{6x}{9x^2} = \frac{2}{3x}$ mit $x \neq 0$.
b) $\frac{4(x+2)}{x+2} = 4$ mit $x \neq -2$.
c) $\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x - 3$ mit $x \neq -3$.
d) $\frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$ mit $x \neq 3$.
Gekürzt werden dürfen nur gemeinsame Faktoren. Deshalb faktorisiert man zuerst Zähler und Nenner, etwa durch Ausklammern oder mit einer binomischen Formel. Die Einschränkung aus dem ursprünglichen Nenner bleibt auch nach dem Kürzen bestehen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Hauptnenner $x(x+1)$: $\frac{3(x+1)}{x(x+1)}$ und $\frac{2x}{x(x+1)}$.
b) Hauptnenner $(x-1)(x+2)$: $\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}$ und $\frac{4(x-1)}{(x-1)(x+2)}$.
c) Hauptnenner $6x$: $\frac{15}{6x}$ und $\frac{2}{6x}$.
Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Jeder Bruch wird mit dem Faktor erweitert, der ihm zum Hauptnenner fehlt. Zähler und Nenner werden dabei immer mit derselben Zahl oder demselben Term multipliziert, damit sich der Wert nicht ändert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\frac{3x \cdot 8}{4 \cdot x^2} = \frac{24x}{4x^2} = \frac{6}{x}$ mit $x \neq 0$.
b) $\frac{2x^2}{6x} = \frac{x}{3}$ mit $x \neq 0$.
c) $\frac{(x-2) \cdot 10}{5(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$ mit $x \neq \pm 2$.
Beim Multiplizieren rechnet man Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. Es ist geschickter, vor dem Ausmultiplizieren über Kreuz zu kürzen, weil die Zahlen dann klein bleiben. Bei c) erkennt man im Nenner die dritte binomische Formel.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} = \frac{4x^2}{8x} = \frac{x}{2}$ mit $x \neq 0$.
b) $\frac{x+1}{3} \cdot \frac{6}{x+1} = 2$ mit $x \neq -1$.
c) $\frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x^2}{x+1} = x(x-1)$ mit $x \neq 0$ und $x \neq -1$.
Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert. Ausgeschlossen sind dabei die Nullstellen aller Nenner und zusätzlich die Zahlen, für die der Zähler des Divisors null wird, denn durch null darf man auch hier nicht teilen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{5}{x}$ mit $x \neq 0$.
b) $\frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$.
c) $\frac{3(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x-1}{x^2-1}$.
d) $\frac{5(x+2)-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5x+10-3x+6}{x^2-4} = \frac{2x+16}{x^2-4}$.
Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man zuerst auf den Hauptnenner, erst dann addiert oder subtrahiert man die Zähler. Bei d) muss die zweite Klammer mit Minus aufgelöst werden: $-3(x-2) = -3x+6$. Ausgeschlossen sind bei c) $x = \pm 1$, bei d) $x = \pm 2$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $x \neq 0$. $3 = 6x$, also $x = 0{,}5$. Probe: $3 : 0{,}5 = 6$.
b) $x \neq -1$. $4 = 2(x+1)$, also $x + 1 = 2$ und $x = 1$. Probe: $\frac{4}{2} = 2$.
c) $x \neq 0; -3$. $5(x+3) = 10x$, also $5x + 15 = 10x$ und $x = 3$. Probe: $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$.
d) $x \neq 1; -2$. $2(x+2) = 3(x-1)$, also $2x + 4 = 3x - 3$ und $x = 7$. Probe: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Bei allen Gleichungen wird mit dem Hauptnenner multipliziert, wodurch eine lineare Gleichung entsteht. Jede gefundene Zahl wird mit der Definitionsmenge verglichen; hier liegen alle Lösungen darin. Antwort: $\mathbb{L} = \{0{,}5\}, \{1\}, \{3\}, \{7\}$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Anna $\frac{1}{4}$, Ben $\frac{1}{6}$ des Zimmers pro Stunde.
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$.
c) $12 : 5 = 2{,}4$ Stunden, das sind 2 Stunden und 24 Minuten.
d) Pro Stunde $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, also 3 Stunden.
Antwort: Gemeinsam brauchen Anna und Ben 2 Stunden und 24 Minuten. Die Zeiten selbst darf man nicht addieren oder mitteln, sondern nur die Arbeitsleistungen pro Stunde. Die gemeinsame Zeit ist der Kehrwert der gemeinsamen Leistung.

Lösung zu Aufgabe 9

a) *120:24=5\,€*.
b) $\frac{120}{x} = 4$ ergibt $x = 30$ Zahlende.
c) $\frac{120}{x} \leq 3$ ergibt $x \geq 40$, also mindestens 40 Zahlende.
d) Durch 0 kann man nicht teilen, und ohne Zahlende gäbe es kein Geschenk. Je mehr Zahlende, desto kleiner der Beitrag.
Antwort: Bei 24 Zahlenden zahlt jeder 5 €, für 4 € braucht man 30 und für höchstens 3 € mindestens 40 Zahlende. Beitrag und Anzahl der Zahlenden sind antiproportional zueinander, ihr Produkt ist immer 120.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Hin $\frac{120}{60} = 2$ h, zurück $\frac{120}{40} = 3$ h, zusammen 5 h.
b) $\frac{240\ \text{km}}{5\ \text{h}} = 48$ km/h.
c) Die Familie ist beim langsameren Tempo länger unterwegs. Deshalb zählt die langsame Fahrt mehr.
d) $v = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{2s}{s \cdot \frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$. Bei $a = 60,\ b = 40$: $\frac{4800}{100} = 48$.
Antwort: Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 48 km/h. Man muss die Gesamtstrecke durch die Gesamtzeit teilen. Der einfache Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten wäre falsch, weil die Familie unterschiedlich lange mit jeder Geschwindigkeit fährt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) *\frac{5+4}{100}=0{,}09\,€*; *\frac{5+20}{500}=0{,}05\,€*.
b) $5 + 0{,}04x = 0{,}06x$, also $5 = 0{,}02x$ und $x = 250$ Minuten.
c) Der Term lässt sich schreiben als $0{,}04 + \frac{5}{x}$, und $\frac{5}{x}$ ist immer positiv.

d) $x > 0$, also $\mathbb{D} = \mathbb{Q}^+$: ohne Gespräche gibt es keinen Durchschnitt.
Antwort: Bei 100 Minuten kostet eine Minute im Schnitt 9 Cent, bei 500 Minuten nur noch 5 Cent; genau 6 Cent sind es bei 250 Minuten. Je mehr man telefoniert, desto weniger fällt die Grundgebühr pro Minute ins Gewicht.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\frac{6}{12} = 0{,}5$ h $= 30$ Minuten.
b) $\frac{6}{v} = \frac{1}{3}$ ergibt $v = 18$ km/h.
c) $\dfrac{6(v+4) - 6v}{v(v+4)} = \dfrac{24}{v(v+4)}$.
d) $\frac{24}{12 \cdot 16} = \frac{1}{8}$ h $= 7{,}5$ Minuten. Kontrolle: $30 - 22{,}5 = 7{,}5$.
Antwort: Mit dem E-Bike spart Mia bei 12 km/h genau 7,5 Minuten. Beim Zusammenfassen wird auf den Hauptnenner $v(v+4)$ gebracht; im Zähler fällt dabei das Glied mit v weg.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Links $\frac{9}{3} = 3$, rechts 7. Tim hat nicht recht. Richtig: $\frac{x+3}{3}$ lässt sich nicht kürzen.
b) Leas Zähler ist $3(2x+3)$, der Faktor 3 wird gekürzt: $\frac{3(2x+3)}{3} = 2x + 3$.
c) Für $x = 2$ steht links $\frac{0}{0}$, das ist nicht definiert; rechts steht 4.
d) Man kürzt nur Faktoren, die in Zähler und Nenner als Produkt stehen, niemals einzelne Summanden.
Antwort: Lea und Mia haben richtig gekürzt, Tim nicht. Aus Summen darf man nicht kürzen. Ein Zahlenbeispiel ist der schnellste Weg, um eine falsche Kürzung zu entlarven.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$: $\dfrac{1 + (x-3)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x-2}{x^2-9}$ mit $x \neq \pm 3$.
b) $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$: $\dfrac{2 - (x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{-x}{x^2-4}$ mit $x \neq \pm 2$.
c) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$: $\dfrac{x + (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ mit $x \neq \pm 1$.
Das Faktorisieren der Nenner zeigt, dass ein Nenner bereits im anderen enthalten ist. Deshalb ist der Hauptnenner hier nicht das Produkt der Nenner, sondern einfach der größere Nenner. Das spart Rechenarbeit und vermeidet unnötig große Terme.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $x \neq 0$. Hauptnenner $3x$: $6 + x = 3x$, also $x = 3$. Probe: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.
b) $x \neq 0$. Hauptnenner $2x$: $6 - x = 2$, also $x = 4$. Probe: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
c) $x \neq 3$. Multiplikation mit $x - 3$: $x = 3$, aber $3 \notin \mathbb{D}$. Also $L = \{\,\}$.

d) $x \neq 0$. $\frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x} = 3$, also $3 = 6x$ und $x = \frac{1}{2}$. Probe: $2 + 1 = 3$.
Bei c) zeigt sich, warum die Definitionsmenge wichtig ist: Die rechnerische Lösung $x = 3$ ist ausgeschlossen, die Gleichung hat also keine Lösung. Antwort: $\mathbb{L} = \{3\}$, $\{4\}$, $\{\,\}$, $\{\frac{1}{2}\}$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) A: $\frac{1}{10}$, B: $\frac{1}{15}$, C: $\frac{1}{30}$ (Abfluss negativ).
b) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$, also 6 Stunden.
c) $\frac{3+2-1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, also $\frac{15}{2} = 7{,}5$ Stunden.
d) $600 \cdot \frac{2}{15} = 80\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde.
e) Zeiten lassen sich nicht addieren, denn die Rohre arbeiten gleichzeitig. Addieren kann man nur, was in derselben Zeit geleistet wird: die Teilleistungen pro Stunde.
Antwort: Mit beiden Zuläufen ist das Becken nach 6 Stunden voll, mit offenem Abfluss erst nach 7,5 Stunden. Netto fließen dann 80 m³ pro Stunde hinein.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $x = 20$: *2{,}50\,€*; $x = 50$: *1{,}30\,€*; $x = 100$: *0{,}90\,€*; $x = 200$: *0{,}70\,€*.
b) $40 + 0{,}5x \leq x$ ergibt $x \geq 80$.
c) $40 + 0{,}5x$ ergibt $x > 133{,}3$, also ab 134 Kuchen.
d) Gewinn, wenn $1{,}2x > 40 + 0{,}5x$, also $0{,}7x > 40$ und $x > 57{,}1$: ab 58 Kuchen.
e) Der Term ist $0{,}5 + \frac{40}{x}$. Bei sehr großem x wird $\frac{40}{x}$ fast null, die Stückkosten nähern sich *0{,}50\,€*.
Antwort: Die Stückkosten sinken mit wachsender Kuchenzahl, weil sich die festen 40 € auf mehr Kuchen verteilen. Gewinn macht die Klasse ab 58 verkauften Kuchen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\frac{1}{R} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, also $R = 4\,\Omega$.
b) $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{R_2}$, also $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{6}$ und $R_2 = 6\,\Omega$.
c) $\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$, also $R = 5\,\Omega$: Zwei gleiche Widerstände ergeben die Hälfte.
d) $\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$; Kehrwert bilden: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.
Antwort: In Fall A beträgt der Gesamtwiderstand 4 Ω, in Fall B ist $R_2 = 6\,\Omega$, in Fall C ergeben sich 5 Ω. Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung ist immer kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ (und $x \neq 0$ für den Bruch selbst).
b) $5(x - 1) = 4(x + 1)$, also $5x - 5 = 4x + 4$ und $x = 9$.
c) Der Bruch ist $\frac{7}{9}$. Probe: $\frac{7+1}{9+1} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.
d) $\frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$; für $x = 9$: $\frac{1}{90} \approx 0{,}0111$.

Antwort: Der gesuchte Bruch ist $\frac{7}{9}$. Die Gleichung wurde durch Multiplikation über Kreuz gelöst, was dasselbe ist wie die Multiplikation mit dem Hauptnenner $5(x+1)$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Alle Umformungen bis $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ sind richtig (Multiplikation mit a beziehungsweise Subtraktion von b^2, dritte binomische Formel).
b) Der Fehler ist das Kürzen von $(a-b)$: Wegen $a = b$ ist $a - b = 0$, und durch null darf man nicht teilen.
c) Für $a = b = 3$: $(3+3) \cdot 0 = 3 \cdot 0$, also $0 = 0$. Die Gleichung ist wahr, aber nach dem Kürzen durch 0 ergibt sich $6 = 3$.
d) Vor jedem Kürzen oder Multiplizieren mit einem Term prüfen, ob dieser null werden kann: Definitionsmenge zuerst.
Antwort: Der „Beweis“ ist falsch, weil durch $a - b = 0$ geteilt wird. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, warum man bei Bruchtermen und Gleichungen immer zuerst die Definitionsmenge bestimmen muss.