Lernzettel - Binomische Formeln

Klasse: Klasse 8

Mit den binomischen Formeln löst du Klammern wie $(x+3)^2$ in einem Schritt auf und zerlegst Terme in Produkte. Beides brauchst du später bei Gleichungen, Bruchtermen und quadratischen Funktionen.

Einstieg: Die Gartenparty

Familie Becker hat im Garten ein quadratisches Beet mit 5 m Seitenlänge. Für die Gartenparty soll rundherum ein 1 m breiter Weg aus Pflastersteinen entstehen. Wie viele Quadratmeter Pflaster werden gebraucht? Du könntest zuerst die Seite 7 m des großen Quadrats berechnen und $49 - 25 = 24\,\mathrm{m}^2$ rechnen. Mit einer Variablen a für die Seite geht es allgemein: $(a+2)^2 - a^2 = 4a + 4$. Genau dafür gibt es die binomischen Formeln: Sie verwandeln ein Quadrat einer Summe in eine Summe, ohne dass du jedes Mal Klammern mühsam ausmultiplizieren musst. Am Ende dieses Kapitels kannst du solche Terme in Sekunden umformen, im Kopf große Quadratzahlen berechnen und Gleichungen mit Klammern lösen.

Binome und die drei Formeln

Definition: Binom

Ein **Binom** ist ein Term mit zwei Gliedern, zum Beispiel $a+b$ oder $3x-2$. Beim Quadrieren eines Binoms entsteht ein **Mittelglied**, das doppelte Produkt der beiden Glieder.

Satz: Die drei binomischen Formeln

- 1. Formel (Plus-Formel): $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2. Formel (Minus-Formel): $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3. Formel (Plus-Minus-Formel): $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Merke: Das doppelte Produkt

Beim Quadrat einer Summe oder Differenz steht in der Mitte immer das **doppelte Produkt** $2ab$. Es darf nie fehlen. Bei der dritten Formel heben sich die beiden Mischglieder $+ab$ und $-ab$ gegenseitig auf.

Woher kommen die Formeln?

Die erste Formel prüfst du durch Ausmultiplizieren:
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Am Quadrat mit der

Seitenlänge $a+b$ siehst du es auch: Es besteht aus einem Quadrat a^2, einem Quadrat b^2 und zwei Rechtecken mit dem Flächeninhalt ab.

Ausmultiplizieren

So gehst du vor: Ausmultiplizieren

1. Bestimme, welche Formel passt: Plus, Minus oder Plus-Minus.
2. Lies a und b ab. Beachte Vorzeichen und Faktoren, zum Beispiel ist bei $(3y-2)^2$ das a gleich $3y$.
3. Schreibe die Formel zuerst allgemein hin und setze dann ein.
4. Quadriere jedes Glied vollständig, auch den Faktor.
5. Fasse gleichartige Glieder zusammen.

Beispiel 1: Erste Formel

Multipliziere $(x+3)^2$ aus.

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

Beispiel 2: Zweite Formel mit Faktor

Multipliziere $(3y-2)^2$ aus.

$(3y-2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 - 12y + 4$.

Der Faktor 3 wird mit quadriert: $(3y)^2 = 9y^2$.

Beispiel 3: Dritte Formel

Multipliziere $(5a+2b)(5a-2b)$ aus.

$(5a+2b)(5a-2b) = (5a)^2 - (2b)^2 = 25a^2 - 4b^2$.

Faktorisieren

Definition: Faktorisieren

Faktorisieren heißt, eine Summe in ein Produkt zu verwandeln. Mit den binomischen Formeln gehst du den Weg rückwärts: Aus $a^2 \pm 2ab + b^2$ wird $(a \pm b)^2$, aus $a^2 - b^2$ wird $(a+b)(a-b)$.

So gehst du vor: Faktorisieren

1. Klammere zuerst einen gemeinsamen Faktor aus, falls es einen gibt.
2. Prüfe, ob das erste und das letzte Glied Quadrate sind.
3. Prüfe bei drei Gliedern, ob das mittlere Glied das doppelte Produkt der beiden

Wurzeln ist.
4. Bei zwei Quadraten mit Minus dazwischen nimmst du die dritte Formel.
5. Mache die Probe durch Ausmultiplizieren.

Beispiel 4: Quadrat erkennen

Faktorisiere $x^2 + 10x + 25$.

Es ist x^2 und $25 = 5^2$. Das doppelte Produkt $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$ passt.

Also $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

Beispiel 5: Differenz zweier Quadrate

Faktorisiere $49 - y^2$.

$49 - y^2 = 7^2 - y^2 = (7 + y)(7 - y)$. Zwei Quadrate mit Minus dazwischen ergeben die dritte Formel.

Beispiel 6: Zuerst ausklammern

Faktorisiere $2x^2 - 8$.

Zuerst klammerst du den Faktor 2 aus: $2x^2 - 8 = 2 \cdot (x^2 - 4)$.

Dann die dritte Formel: $2 \cdot (x + 2)(x - 2)$.

Die Formeln am Quadrat sehen

Die erste Formel ist mehr als ein Rechenrezept. Zeichnest du ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$, dann zerfällt es in vier Teile: ein großes Quadrat mit dem Inhalt a^2, ein kleines Quadrat mit dem Inhalt b^2 und zwei gleiche Rechtecke mit je ab. Das doppelte Produkt $2ab$ sind also genau diese beiden Rechtecke. Bei $a = 5$ und $b = 3$ ergibt sich $25 + 9 + 15 + 15 = 64 = 8^2$. Wer diese Zeichnung im Kopf hat, vergisst das Mittelglied nie wieder.

Beispiel 11: Die Formel als Zeichnung

Zeige mit einer Zeichnung, dass $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gilt.

Beginne mit einem Quadrat der Seite a (Inhalt a^2). Schneide am rechten Rand einen Streifen der Breite b ab, das sind ab, und am oberen Rand ebenfalls einen Streifen ab. Dabei wurde das Eckquadrat b^2 zweimal weggenommen, also gibst du es einmal zurück. Übrig bleibt ein Quadrat mit der Seite $a - b$: $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$.

Ergänzen und Erkennen

Oft musst du nicht ausmultiplizieren, sondern erkennen, ob ein Term ein Binom ist. Das ist

die Vorbereitung für die quadratische Ergänzung in der Oberstufe. Du suchst die beiden Quadrate und prüfst, ob das Mittelglied das doppelte Produkt der Wurzeln ist. Bei $x^2 + 6x + \square$ gilt: Das Mittelglied $6x = 2 \cdot x \cdot 3$ verlangt, dass $\square = 3^2 = 9$ ist.

So gehst du vor: Term zum Binom ergänzen

1. Schreibe das Mittelglied als $2 \cdot x \cdot$ Zahl, die Zahl ist die Hälfte vom Faktor vor x.
2. Quadriere diese Zahl: Das ist das fehlende Glied.
3. Schreibe das Binom $(x \pm \text{Zahl})^2$ hin.
4. Kontrolliere durch Ausmultiplizieren.

Beispiel 12: Ergänzen

Ergänze $x^2 - 10x + \square$ so, dass ein Binom entsteht, und löse dann $x^2 - 10x + 25 = 36$.

Die Hälfte von 10 ist 5, also $\square = 25$ und $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. Die Gleichung heißt $(x - 5)^2 = 36$. Damit ist $x - 5 = 6$ oder $x - 5 = -6$, also $x = 11$ oder $x = -1$. Probe: $11^2 - 110 + 25 = 36$ und $1 + 10 + 25 = 36$.

Zusammengesetzte Aufgaben

In Klassenarbeiten kommen die Formeln fast nie allein vor. Du verbindest sie mit dem Ausklammern, mit Minuszeichen vor Klammern und mit Gleichungen. Wichtig ist eine feste Reihenfolge: Erst Formeln anwenden, dann Klammern auflösen, dann zusammenfassen. Setze bei einem Minuszeichen vor einer Klammer immer eine neue Klammer um das ausmultiplizierte Ergebnis.

Beispiel 13: Mit Bruch und Faktor

Vereinfache $\frac{1}{2}(2x + 4)^2 - 2(x + 1)(x - 1)$.

Erste Formel: $(2x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$, davon die Hälfte ist $2x^2 + 8x + 8$. Dritte Formel: $2(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$. Subtraktion mit Klammer: $2x^2 + 8x + 8 - (2x^2 - 2) = 2x^2 + 8x + 8 - 2x^2 + 2 = 8x + 10$.

Beispiel 14: Zahlen im Kopf mit Zerlegung

Berechne 103^2, 97^2 und $97 \cdot 103$.

$103^2 = (100 + 3)^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$.
$97^2 = (100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$.
$97 \cdot 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991$. Kontrolle: Die Summe von 103^2 und 97^2 ist 20018, das ist $2 \cdot (100^2 + 3^2) = 2 \cdot 10009$.

Achtung: Drei Stolperfallen

Erstens: Bei $(a-b)^2$ wird das Mittelglied negativ, das letzte Glied aber positiv. Zweitens: Bei $(-x+4)^2$ darfst du die Reihenfolge tauschen und $(4-x)^2$ schreiben, das Ergebnis ist $x^2-8x+16$. Drittens: $(a+b)(a-b)$ ist nicht a^2+b^2, denn b^2 bekommt ein Minus.

Wusstest du?

Schon die Babylonier kannten vor etwa 4000 Jahren Rechenregeln, die den binomischen Formeln entsprechen. Der Name „Binom“ kommt vom lateinischen „bi“ (zwei) und „nomen“ (Name, Glied). Heute steckt die Idee in vielen Bereichen: in der Verschlüsselung von Daten, in der Statistik und in der Physik, wenn Abstände quadriert werden.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Binom: Term mit zwei Gliedern, zum Beispiel $a+b$ oder $3x-2$.
- 1. Formel: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; 2. Formel: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
- 3. Formel: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; das Mittelglied fällt weg.
- Das doppelte Produkt $2ab$ darf nie fehlen; Faktoren werden mitquadriert: $(3y)^2=9y^2$.
- Faktorisieren heißt rückwärts rechnen: Erst gemeinsamen Faktor ausklammern, dann Muster erkennen.
- Im Kopf: $31^2=(30+1)^2=961$ und $52\cdot 48=(50+2)(50-2)=2496$.
- Geometrisch: $(a+b)^2$ ist ein Quadrat aus a^2, b^2 und zwei Rechtecken ab.
- Probe mit einer kleinen Zahl oder durch Ausmultiplizieren fängt fast jeden Fehler.

Achtung

Der Klassiker ist $(a+b)^2=a^2+b^2$. Das ist falsch, es fehlt das doppelte Produkt $2ab$. Bei $(a-b)^2$ bleibt das letzte Glied $+b^2$. Quadriere Faktoren mit: $(3y)^2=9y^2$, nicht $3y^2$. Bei der dritten Formel steht ein Minus: a^2-b^2, nicht a^2+b^2.

Rechnen im Kopf und Terme vereinfachen

Hinweis

Mit den Formeln rechnest du manche Aufgaben im Kopf:
$31^2=(30+1)^2=900+60+1=961$, $29^2=(30-1)^2=900-60+1=841$ und $52\cdot 48=(50+2)(50-2)=2500-4=2496$.

Beispiel 7: Terme vereinfachen

Vereinfache $(x+2)^2-(x-2)^2$.

$(x+2)^2-(x-2)^2=x^2+4x+4-(x^2-4x+4)$. Setze die zweite Klammer in eine Klammer, damit das Minus auf alle Glieder wirkt.

Dann $=x^2+4x+4-x^2+4x-4=8x$.

Beispiel 8: Gleichung mit Formel

Löse $(x+3)^2=x^2+15$.

Ausmultiplizieren: $x^2+6x+9=x^2+15$. Die x^2 heben sich weg.

Es bleibt $6x=6$, also $x=1$. Probe: $16=1+15$. Stimmt.

Beispiel 9: Zwei Formeln kombinieren

Vereinfache $(x+5)^2-(x-5)(x+5)$.

Erste Formel: $x^2+10x+25$. Dritte Formel: x^2-25.

$x^2+10x+25-(x^2-25)=10x+50=10(x+5)$.

Beispiel 10: Gartenbeet

Ein quadratisches Beet mit der Seite a wird auf jeder Seite um 2 m erweitert. Wie wächst die Fläche?

Neue Fläche: $(a+2)^2=a^2+4a+4$.

Die Fläche wächst um $4a+4$: zwei Streifen $2a$ und ein Eckquadrat $2\cdot 2=4$. Für $a=6$ m wächst sie von 36 m² auf 64 m².

Vertiefung: Binomische Formeln sicher anwenden

So gehst du vor: Erkennen, welche Formel passt

1. Steht ein Quadrat einer Summe da, also $(\ldots+\ldots)^2$, nimmst du die erste Formel.
2. Steht ein Quadrat einer Differenz da, also $(\ldots-\ldots)^2$, nimmst du die zweite Formel.
3. Steht ein Produkt aus zwei Klammern mit denselben Gliedern, aber verschiedenen Rechenzeichen da, nimmst du die dritte Formel.
4. Lies a und b ab und setze sie in Klammern ein, besonders wenn sie Zahlen und Variablen enthalten, etwa $a=3x$.
5. Kontrolliere am Ende mit einer einfachen Zahl, zum Beispiel $x=1$.

Beispiel: Faktorisieren in zwei Schritten

Zerlege $2x^2-12x+18$ in Faktoren.

Auf den ersten Blick passt keine Formel, denn $2x^2$ ist kein Quadrat einer einfachen

Zahl mal x. Klammere deshalb zuerst den gemeinsamen Faktor 2 aus: $2(x^2 - 6x + 9)$. In der Klammer steht nun ein Term, bei dem das erste und das letzte Glied Quadrate sind (x^2 und 3^2) und das Mittelglied das doppelte Produkt $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ mit Minuszeichen ist. Also gilt $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$. Merke: Prüfe vor dem Faktorisieren immer, ob man zuerst etwas ausklammern kann.

Schon gewusst?

Die binomischen Formeln waren schon den Griechen vor über 2000 Jahren bekannt, allerdings nicht als Formeln, sondern als Aussagen über Flächen. Euklid beschreibt im zweiten Buch seiner „Elemente“, dass ein Quadrat über einer zusammengesetzten Strecke aus zwei kleineren Quadraten und zwei gleichen Rechtecken besteht. Das ist genau die erste binomische Formel. Den Namen „Binom“ (zweigliedriger Ausdruck) erhielten die Formeln erst viel später, in der Algebra der Neuzeit. Heute nutzt man sie täglich beim Kopfrechnen.

Ottos Tipp

Mache die Probe mit einer kleinen Zahl. Setze für x die Zahl 1 oder 2 in den Ausgangsterm und in dein Ergebnis ein. Stimmen beide Werte nicht überein, steckt ein Fehler im Ergebnis. Kontrolliere beim Faktorisieren immer durch Ausmultiplizieren.