Arbeitsblatt - Binomische Formeln

Klasse: Klasse 8 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Die erste binomische Formel

Multipliziere mit der ersten binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus. Schreibe die Formel zuerst allgemein hin und lies dann a und b ab.

a) $(x+4)^2$
b) $(a+7)^2$
c) $(2y+3)^2$
d) $(5m+1)^2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Die zweite binomische Formel

Multipliziere mit der zweiten binomischen Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ aus. Achte darauf, dass das letzte Glied immer positiv bleibt.

a) $(x-5)^2$
b) $(b-9)^2$
c) $(3z-2)^2$
d) $(4a-0{,}5)^2$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Die dritte binomische Formel

Löse die Klammern mit der dritten Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ auf. Das Mittelglied fällt hier weg.

a) $(x+6)(x-6)$
b) $(7+a)(7-a)$
c) $(2y+5)(2y-5)$
d) $(3a+4b)(3a-4b)$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Fehler in Lenas Heft

Lena hat in ihrer Hausaufgabe zwei Rechnungen gemacht, die ihr Lehrer rot angestrichen hat:
(1) $(x+5)^2 = x^2 + 25$

(2) $(a-3)^2 = a^2 - 6a - 9$

a) Beschreibe den Fehler in Rechnung (1) und berechne das richtige Ergebnis.
b) Beschreibe den Fehler in Rechnung (2) und berechne das richtige Ergebnis.
c) Überprüfe beide richtigen Ergebnisse mit der Probe $x = 2$ beziehungsweise $a = 5$.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Rückwärts: Faktorisieren

Verwandle die Summen in Produkte. Prüfe immer, ob das Mittelglied das doppelte Produkt ist.

a) $x^2 + 12x + 36$
b) $y^2 - 14y + 49$
c) $81 - a^2$
d) $4x^2 - 20x + 25$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Kopfrechnen mit Formeln

Berechne ohne Taschenrechner. Zerlege die Zahlen so, dass du eine binomische Formel benutzen kannst.

a) 21^2
b) 59^2
c) $48 \cdot 52$
d) $103 \cdot 97$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Das Beet mit Weg

Familie Becker hat ein quadratisches Gemüsebeet mit der Seitenlänge a (in Metern). Rundherum soll ein 1 m breiter Weg angelegt werden.

a) Welche Seitenlänge hat das Quadrat aus Beet und Weg?
b) Stelle einen Term für die Gesamtfläche auf und multipliziere ihn mit einer binomischen Formel aus.
c) Wie groß ist die Fläche des Weges allein (als Term)?
d) Berechne die Wegfläche für $a = 5$ m. Ein Quadratmeter Pflaster kostet *18*\,€. Wie teuer wird der Weg?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Terrasse wird umgebaut

Auf Herrn Öztürks Grundstück liegt eine quadratische Terrasse mit der Seitenlänge x Metern. Beim Umbau wird sie in der einen Richtung um 3 m verlängert und in der

anderen Richtung um 3 m verkürzt.

a) Gib die neuen Seitenlängen und den Flächeninhalt als Term an.
b) Um wie viel Quadratmeter wird die Fläche kleiner? Hängt der Wert von x ab?
c) Berechne die neue Fläche für $x = 8$ m.
d) Erkläre mit einer Zeichnung oder in Worten, wo die 9 Quadratmeter geblieben sind.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Bilderrahmen

Ein quadratisches Foto mit der Kantenlänge x Zentimetern soll einen Holzrahmen der Breite d Zentimeter erhalten.

a) Welche Seitenlänge hat der gerahmte Bereich?
b) Stelle einen Term für die Rahmenfläche auf, indem du von der Außenfläche die Fotofläche abziehst. Vereinfache.
c) Berechne die Rahmenfläche für $x = 40$ und $d = 5$ und prüfe mit dem Term $4d(x + d)$.
d) Das Holz kostet *0{,}04\,€* pro Quadratzentimeter. Wie teuer ist der Rahmen?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Terme vereinfachen

Vereinfache so weit wie möglich. Setze Klammern, wenn ein Minus vor einer Klammer steht.

a) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$
b) $(2a + 1)^2 - (2a - 1)(2a + 1)$
c) $(y - 4)^2 + 8y$
d) $3(x + 2)^2 - 12x$

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Gleichungen mit binomischen Formeln

Löse die Gleichungen. Multipliziere zuerst aus; oft fällt x^2 auf beiden Seiten weg. Mache die Probe.

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 40$
b) $(x - 5)^2 = (x + 1)^2$
c) $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 3x$
d) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 13$

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Quadratzahlen im Rechenheft

Mia schreibt in ihr Heft: $7^2 - 6^2 = 13$ und $13 = 7 + 6$. Das findet sie spannend und untersucht weiter.

a) Prüfe die Beobachtung für $10^2 - 9^2$.
b) Zeige allgemein, dass $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = n + (n+1)$ gilt.
c) Berechne $51^2 - 50^2$ und $100^2 - 99^2$ ohne Taschenrechner.
d) Kann die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen gerade sein? Begründe.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Trainingsfeld

Der Sportverein hat ein quadratisches Trainingsfeld mit 14 m Seitenlänge. Es soll umgebaut werden: eine Seite wird um 4 m länger, die andere um 4 m kürzer.

Feld	Länge	Breite
alt	14 m	14 m
neu	18 m	10 m

a) Berechne beide Flächen.
b) Wie groß ist der Unterschied, und welche Rechnung mit einer binomischen Formel erklärt ihn?
c) Das Feld wird neu mit Kunstrasen belegt (*26\,€* pro m^2). Wie viel kostet das neue Feld, wie viel das alte?
d) Warum ist ein Quadrat bei gleichem Umfang immer die größte Rechteckfläche?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Spielwiese

Nach einem Umbau hat die quadratische Spielwiese des Kindergartens die Fläche $A = x^2 + 10x + 25$ (in m^2), wobei x die Seitenlänge vor dem Umbau war.

a) Faktorisiere den Term und gib die neue Seitenlänge an.
b) Um wie viel Meter wurde die Wiese an jeder Seite erweitert?
c) Berechne die Fläche für $x = 3{,}5$ m.
d) Die neue Wiese hat $81\,\mathrm{m}^2$. Berechne x.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Pflasterfirma

Die Firma „Stein & Weg“ plant für eine quadratische Terrasse (6 m $\times$ 6 m) vier Umbauvarianten. Immer wird eine Seite um d Meter länger und die andere um d Meter kürzer.

Variante	Länge	Breite	Fläche
A (Original)	6	6	?
B	8	4	?
C	9	3	?

Variante	Länge	Breite	Fläche
D	7	5	?

a) Berechne die vier Flächen.
b) Welches Muster siehst du? Vergleiche jeweils mit $36\,\mathrm{m}^2$ und mit d^2.
c) Beweise das Muster allgemein mit der dritten binomischen Formel.
d) Der Quadratmeter Pflaster kostet $45\,€$. Wie viel spart man bei Variante C gegenüber A?
e) Die Terrasse soll mindestens $30\,\mathrm{m}^2$ groß sein. Welche Varianten sind möglich?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Kopfrechenturnier

Bei einem Turnier in der Schule darf nur mit binomischen Formeln im Kopf gerechnet werden. Die Aufgaben stehen im Plan.

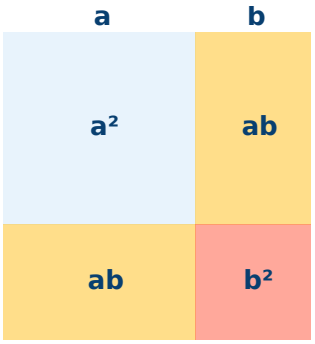
Aufgabe	Zerlegung	Ergebnis
31^2	?	?
99^2	?	?
$67 \cdot 73$	?	?
$18 \cdot 22$	?	?
$47 \cdot 58$	nicht möglich	–

a) Ergänze die Zerlegungen und Ergebnisse der vier lösbaren Aufgaben.
b) Warum geht $47 \cdot 58$ nicht mit der dritten Formel? Was müsste sich ändern?
c) Erfinde zwei eigene Aufgaben, die sich mit der dritten Formel lösen lassen, und löse sie.
d) Wann lohnt sich die Methode, wann ist die schriftliche Multiplikation schneller? Begründe in zwei Sätzen.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Das Quadrat aus vier Teilen

Das große Quadrat hat die Seitenlänge $a + b$. Es ist in ein Quadrat mit der Seite a, ein Quadrat mit der Seite b und zwei gleiche Rechtecke zerlegt. Für das Zahlenbeispiel gilt $a = 5$ cm und $b = 3$ cm.



a) Berechne die vier Teilflächen und die Gesamtfläche für $a = 5$ cm und $b = 3$ cm.
b) Schreibe die Gesamtfläche allgemein als $(a + b)^2$ und als Summe der Teilflächen. Welche Formel entsteht?
c) Wie kannst du mit einer ähnlichen Zeichnung die zweite Formel $(a - b)^2$ erklären?
d) Berechne $(a - b)^2$ für $a = 8$ und $b = 3$ mit der Formel und kontrolliere.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Produkte aus Nachbarzahlen

Elias entdeckt: $3 \cdot 5 = 15$ liegt direkt unter $4^2 = 16$, und $5 \cdot 7 = 35$ liegt direkt unter $6^2 = 36$. Die Tabelle zeigt weitere Beispiele.

n	$n \cdot (n + 2)$	$(n + 1)^2$
3	15	16
5	35	36
9	?	?
19	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Beweise mit einer binomischen Formel: $n \cdot (n + 2) = (n + 1)^2 - 1$.
c) Berechne $49 \cdot 51$ und $99 \cdot 101$ im Kopf.
d) Warum liegt das Produkt immer genau 1 unter dem Quadrat der Mitte? Welche Rolle spielt die dritte Formel?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Ergänze zum Binom

Welche Zahl muss an der Stelle des Fragezeichens stehen, damit sich der Term als Quadrat eines Binoms schreiben lässt? Gib das Binom an.

a) $x^2 + ?x + 16$ (zwei Möglichkeiten)
b) $x^2 - 12x + ?$
c) $4x^2 + ?x + 9$ (positiv)
d) $9y^2 - 30y + ?$
e) Für welche Zahl c ist $x^2 + 6x + c$ ein Binom? Berechne dann x aus $x^2 + 6x + c = 49$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Summe und Differenz der Quadrate

Zwei Zahlen a und b sind gegeben. Die Schülerin Selin behauptet: „Das Vierfache des Produkts ist immer die Differenz der Quadrate von Summe und Differenz.“

a) Zeige: $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.
b) Zeige: $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.
c) Berechne $4\cdot 13\cdot 7$ mit der Formel aus a), indem du 20^2-6^2 rechnest.
d) Zwei Zahlen haben die Summe 20 und die Differenz 4. Berechne ihr Produkt mit Hilfe von a) und kontrolliere durch Bestimmen der Zahlen.