Lösungen - Binomische Formeln

Klasse: Klasse 8

Lösung zu Aufgabe 1

a) $a = x,\ b = 4$: $(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$.
b) $a = a,\ b = 7$: $(a+7)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49$.
c) $a = 2y,\ b = 3$: $(2y+3)^2 = (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 + 12y + 9$.
d) $a = 5m,\ b = 1$: $(5m+1)^2 = (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot 1 + 1^2 = 25m^2 + 10m + 1$.
Bei jeder Teilaufgabe wird zuerst das erste Glied quadriert, dann das doppelte Produkt gebildet und zuletzt das zweite Glied quadriert. Häufigster Fehler ist, das Mittelglied zu vergessen. Probe zu a) mit $x = 1$: $5^2 = 25$ und $1 + 8 + 16 = 25$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.
b) $(b-9)^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot 9 + 9^2 = b^2 - 18b + 81$.
c) $(3z-2)^2 = (3z)^2 - 2 \cdot 3z \cdot 2 + 2^2 = 9z^2 - 12z + 4$.
d) $(4a-0{,}5)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 16a^2 - 4a + 0{,}25$.
Das Mittelglied bekommt das Minuszeichen, das letzte Glied ist als Quadrat immer positiv. Achte bei c) und d) darauf, dass der ganze Faktor quadriert wird: $(3z)^2 = 9z^2$ und nicht $3z^2$. Probe zu a) mit $x = 1$: $(-4)^2 = 16$ und $1 - 10 + 25 = 16$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$.
b) $(7+a)(7-a) = 7^2 - a^2 = 49 - a^2$.
c) $(2y+5)(2y-5) = (2y)^2 - 5^2 = 4y^2 - 25$.
d) $(3a+4b)(3a-4b) = (3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2$.
Bei der dritten Formel stehen in beiden Klammern dieselben Glieder, einmal mit Plus und einmal mit Minus. Die gemischten Produkte heben sich auf, deshalb bleibt nur die Differenz der Quadrate übrig. Kontrolle zu a) mit $x = 10$: $16 \cdot 4 = 64$ und $100 - 36 = 64$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) In (1) fehlt das doppelte Produkt $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$. Richtig ist $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
b) In (2) ist das letzte Glied falsch: $(-3)^2 = +9$, nicht -9. Richtig ist $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$.
c) Für $x = 2$: links $(2+5)^2 = 49$, rechts $4 + 20 + 25 = 49$. Für $a = 5$: links $(5-3)^2 = 4$, rechts $25 - 30 + 9 = 4$. Beide Ergebnisse stimmen.
Lenas Fehler sind die beiden typischsten Fehler bei binomischen Formeln: das fehlende Mittelglied und das falsche Vorzeichen beim Quadrat. Die Probe mit einer Zahl deckt beide Fehler sofort auf, deshalb lohnt sie sich bei jeder Hausaufgabe.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $36 = 6^2$ und $2 \cdot x \cdot 6 = 12x$: $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.
b) $49 = 7^2$ und $2 \cdot y \cdot 7 = 14y$: $y^2 - 14y + 49 = (y - 7)^2$.
c) Zwei Quadrate mit Minus: $81 - a^2 = 9^2 - a^2 = (9 + a)(9 - a)$.
d) $4x^2 = (2x)^2$, $25 = 5^2$, $2 \cdot 2x \cdot 5 = 20x$: $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$.
Beim Faktorisieren prüft man zuerst, ob das erste und das letzte Glied Quadratzahlen sind, und danach, ob das Mittelglied genau das doppelte Produkt ist. Bei einer Differenz zweier Quadrate ohne Mittelglied verwendet man die dritte Formel. Zur Kontrolle multipliziert man das Ergebnis wieder aus.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $21^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$.
b) $59^2 = (60 - 1)^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481$.
c) $48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 2500 - 4 = 2496$.
d) $103 \cdot 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 10000 - 9 = 9991$.
Der Trick besteht darin, die Zahl als Summe oder Differenz einer runden Zahl und einer kleinen Zahl zu schreiben. Bei Produkten wie $48 \cdot 52$ sucht man die Mitte (hier 50); beide Faktoren müssen gleich weit davon entfernt sein.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Auf jeder Seite kommt 1 m dazu: $(a + 2)$ Meter.
b) $A_{\text{ges}} = (a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$.
c) $A_{\text{Weg}} = (a^2 + 4a + 4) - a^2 = 4a + 4$ (vier Streifen $a \times 1$ und vier Eckquadrate 1×1).
d) $4 \cdot 5 + 4 = 24\,\text{m}^2$; Kosten *24\cdot18=432\,€*.
Antwort: Der Weg ist bei $a = 5$ m genau $24\,\text{m}^2$ groß und kostet *432\,€*. Kontrolle: Das Gesamtquadrat hat $7^2 = 49\,\text{m}^2$, das Beet $25\,\text{m}^2$, die Differenz beträgt $24\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Neue Seiten: $(x + 3)$ m und $(x - 3)$ m. Fläche: $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$.
b) Die Fläche ist um $9\,\text{m}^2$ kleiner als x^2. Der Wert hängt nicht von x ab.
c) $64 - 9 = 55\,\text{m}^2$, denn $11 \cdot 5 = 55$.
d) Der angebaute Streifen $3 \times x$ ist genauso groß wie der abgeschnittene. Aber an der Ecke fehlt ein Quadrat 3×3 – das sind die $9\,\text{m}^2$.
Antwort: Die neue Terrasse ist immer um genau $9\,\text{m}^2$ kleiner als die alte, egal wie groß x ist. Das liegt an der dritten binomischen Formel, bei der das Glied x^2 erhalten bleibt und nur 3^2 abgezogen wird.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Seitenlänge außen: $x + 2d$.

b) $(x+2d)^2 - x^2 = x^2 + 4dx + 4d^2 - x^2 = 4dx + 4d^2 = 4d(x+d)$.
c) Außen $50^2 = 2500$, innen $40^2 = 1600$, Differenz 900 cm². Term: $4 \cdot 5 \cdot 45 = 900$ cm².
d) *900\cdot0{,}04=36\,€*.
Antwort: Der Rahmen ist $900\,\mathrm{cm}^2$ groß und kostet *36\,€*. Der vereinfachte Term $4d(x+d)$ beschreibt vier gleiche Rechtecke mit den Seiten d und $x+d$, die zusammen den Rahmen bilden.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 12x$.
b) $4a^2 + 4a + 1 - (4a^2 - 1) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 1 = 4a + 2$.
c) $y^2 - 8y + 16 + 8y = y^2 + 16$.
d) $3(x^2 + 4x + 4) - 12x = 3x^2 + 12x + 12 - 12x = 3x^2 + 12$.
Wichtig ist, das Ergebnis einer binomischen Formel in Klammern zu setzen, wenn davor ein Minuszeichen steht. Sonst würde nur das erste Glied subtrahiert. Probe zu a) mit $x = 1$: $16 - 4 = 12$ und $12 \cdot 1 = 12$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$, also $8x = 24$ und $x = 3$. Probe: $49 = 9 + 40$.
b) $x^2 - 10x + 25 = x^2 + 2x + 1$, also $24 = 12x$ und $x = 2$. Probe: $9 = 9$.
c) $x^2 - 36 = x^2 - 3x$, also $3x = 36$ und $x = 12$. Probe: $18 \cdot 6 = 108$ und $144 - 36 = 108$.
d) $4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 13$, also $4x = 12$ und $x = 3$. Probe: $49 = 36 + 13$.
Bei allen vier Gleichungen fällt das quadratische Glied weg, weil es auf beiden Seiten mit demselben Faktor vorkommt. Übrig bleibt eine lineare Gleichung, die man wie gewohnt löst. Die Probe in der Ausgangsgleichung bestätigt jeweils die Lösung.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $100 - 81 = 19$ und $10 + 9 = 19$. Stimmt.
b) $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, und $n + (n+1) = 2n + 1$.
c) $51^2 - 50^2 = 51 + 50 = 101$; $100^2 - 99^2 = 100 + 99 = 199$.
d) Nein: $2n + 1$ ist immer ungerade, weil $2n$ gerade ist und 1 dazukommt.
Antwort: Die Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen ist immer die Summe der beiden Basiszahlen und damit immer ungerade. Mias Beobachtung gilt also allgemein, wie die Umformung mit der ersten binomischen Formel zeigt.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Alt $14^2 = 196\,\mathrm{m}^2$; neu $18 \cdot 10 = 180\,\mathrm{m}^2$.
b) Unterschied $16\,\mathrm{m}^2$. Es gilt $(14+4)(14-4) = 14^2 - 4^2 = 196 - 16 = 180$.
c) Neu *180\cdot26=4680\,€*; alt *196\cdot26=5096\,€*.
d) Mit Seiten $x + d$ und $x - d$ (gleicher Umfang) ist die Fläche $x^2 - d^2$. Sie ist am größten für $d = 0$, also beim Quadrat.

Antwort: Das neue Feld ist $16\,\mathrm{m}^2$ kleiner und kostet *416\,€* weniger. Die dritte binomische Formel erklärt, warum der Verlust genau 4^2 beträgt.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$. Neue Seitenlänge: $(x+5)$ m.
b) Um 5 m.
c) $(3{,}5+5)^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25\,\mathrm{m}^2$.
d) $(x+5)^2 = 81$ liefert $x+5 = 9$, also $x = 4$ m (die negative Lösung $x+5=-9$ ist als Länge unmöglich).
Antwort: Die Wiese wurde an jeder Seite um 5 m verlängert und hatte vorher eine Seitenlänge von 4 m. Der Term $x^2+10x+25$ ist ein vollständiges Quadrat, weil $10x = 2\cdot x\cdot 5$ und $25 = 5^2$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 15

a) A: $36\,\mathrm{m}^2$; B: $8\cdot 4 = 32$; C: $9\cdot 3 = 27$; D: $7\cdot 5 = 35\,\mathrm{m}^2$.
b) B ist um $4 = 2^2$ kleiner als A, C um $9 = 3^2$, D um $1 = 1^2$. Die Fläche ist immer $36 - d^2$.
c) $(6+d)(6-d) = 36 - d^2$ (dritte binomische Formel).
d) Weniger Fläche: $9\,\mathrm{m}^2$, also *9\cdot45=405\,€* weniger Pflaster.
e) Mindestens $30\,\mathrm{m}^2$: nur Variante A (36), B (32) und D (35). Variante C hat nur $27\,\mathrm{m}^2$.
Antwort: Die Fläche jeder Variante ist um d^2 kleiner als das Original. Möglich sind die Varianten A, B und D; mit Variante C spart man zwar 405 €, unterschreitet aber die Mindestfläche.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $31^2 = (30+1)^2 = 900+60+1 = 961$; $99^2 = (100-1)^2 = 10000-200+1 = 9801$;
$67\cdot 73 = (70-3)(70+3) = 4900 - 9 = 4891$;
$18\cdot 22 = (20-2)(20+2) = 400 - 4 = 396$.
b) Die Faktoren 47 und 58 liegen nicht gleich weit von einer runden Zahl entfernt ($47 = 50-3$, $58 = 50+8$). Sie müssten symmetrisch zu einer Mitte liegen, zum Beispiel $47\cdot 53$.
c) Beispiele: $29\cdot 31 = 900 - 1 = 899$ und $96\cdot 104 = 10000 - 16 = 9984$.
d) Die Methode lohnt sich, wenn die Zahlen nahe an einer runden Zahl liegen und symmetrisch dazu sind. Sonst ist schriftliches Rechnen oft schneller.
Antwort: Die dritte Formel hilft nur bei Faktoren, die symmetrisch um eine runde Zahl liegen; die erste und zweite Formel helfen bei Quadraten von Zahlen nahe an Zehnern oder Hundertern.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, zweimal $ab = 2\cdot 15 = 30$ cm². Summe 64 cm²; und $(5+3)^2 = 64$ cm².

b) $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$: erste binomische Formel.
c) Vom Quadrat mit der Seite a schneidest du zwei Streifen der Breite b weg. Dabei wird das kleine Eckquadrat b^2 doppelt abgezogen, also muss es einmal wieder dazu: $a^2 - 2ab + b^2$.
d) $8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 + 3^2 = 64 - 48 + 9 = 25$; Kontrolle: $(8-3)^2 = 25$.
Die Zeichnung zeigt, dass die binomischen Formeln keine willkürlichen Regeln sind, sondern Aussagen über Flächen. Das doppelte Produkt $2ab$ entspricht den beiden Rechtecken, die beim Quadrieren einer Summe immer dazugehören.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $9 \cdot 11 = 99$ und $10^2 = 100$; $19 \cdot 21 = 399$ und $20^2 = 400$.
b) $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n = n(n+2)$.
c) $49 \cdot 51 = 50^2 - 1 = 2499$; $99 \cdot 101 = 100^2 - 1 = 9999$.
d) Die Faktoren n und $n+2$ liegen genau 1 unter und 1 über der Mitte $n+1$. Damit gilt $(m-1)(m+1) = m^2 - 1$ mit $m = n+1$.
Antwort: Das Produkt zweier Zahlen, die sich um 2 unterscheiden, liegt immer genau 1 unter dem Quadrat der Zahl dazwischen. Mit diesem Trick rechnet man $49 \cdot 51 = 2499$ und $99 \cdot 101 = 9999$ sofort im Kopf.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $16 = 4^2$, also $? = \pm 2 \cdot 4 = \pm 8$: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ oder $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.
b) Das Mittelglied $-12x = -2 \cdot x \cdot 6$ verlangt $? = 36$: $(x-6)^2$.
c) $4x^2 = (2x)^2$, $9 = 3^2$: $? = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$: $(2x+3)^2$.
d) $9y^2 = (3y)^2$, $-30y = -2 \cdot 3y \cdot 5$: $? = 25$: $(3y-5)^2$.
e) $c = 9$, denn $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Dann $(x+3)^2 = 49$, also $x+3 = 7$ oder $x+3 = -7$: $x = 4$ oder $x = -10$.
Man nutzt beim Ergänzen immer dieselbe Idee: Das Mittelglied muss das doppelte Produkt der Wurzeln von erstem und letztem Glied sein. Dieses Verfahren heißt quadratische Ergänzung und wird in Klasse 9 zum Lösen quadratischer Gleichungen gebraucht.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.
b) $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$.
c) $20^2 - 6^2 = 400 - 36 = 364$ und $4 \cdot 13 \cdot 7 = 364$. Gleich.
d) $4ab = 20^2 - 4^2 = 384$, also $ab = 96$. Kontrolle: Die Zahlen sind 12 und 8, und $12 \cdot 8 = 96$.
Antwort: Selins Behauptung stimmt für alle Zahlen. Mit der Formel aus a) kann man aus Summe und Differenz zweier Zahlen direkt ihr Produkt berechnen, ohne die Zahlen selbst zu kennen.