Lernzettel - Zinsrechnung

Klasse: Klasse 7

Wer Geld anlegt oder leiht, hat mit Zinsen zu tun. Die Zinsrechnung ist die Prozentrechnung mit einem Zeitfaktor.

Einstieg: Sparschwein oder Konto?

Lena hat *600\,€* gespart. Ihr Sparschwein im Regal gibt kein Geld dazu. Auf dem Sparkonto der Bank wächst das Geld langsam von selbst: Bei $2\,\%$ Zinsen sind es nach einem Jahr *12\,€* mehr, also *612\,€*. Die Bank „mietet“ sich Lenas Geld und zahlt dafür eine Miete, die Zinsen. Umgekehrt zahlt man Zinsen, wenn man sich Geld leiht. Wie hoch die Miete ist, hängt von drei Dingen ab: vom Betrag, vom Zinssatz und von der Zeit.

Grundbegriffe der Zinsrechnung

Definition: Zinsen, Kapital, Zinssatz

Wer Geld bei einer Bank anlegt, erhält **Zinsen**. Wer sich Geld leiht, zahlt Zinsen. Das **Kapital** K entspricht dem Grundwert, der **Zinssatz** $p\,\%$ dem Prozentsatz und die **Zinsen** Z dem Prozentwert. Die Zinsen beziehen sich meist auf ein Jahr (p. a., „pro anno“).

Jahreszinsen

Regel: Jahreszinsen

$Z = K \cdot \frac{p}{100}$. Daraus folgen $K = \frac{Z}{p} \cdot 100$ und $p = \frac{Z}{K} \cdot 100$.

Beispiel 1: Zinsen

2 500 € werden ein Jahr zu $3\,\%$ angelegt.

$Z = 2500 \cdot 0{,}03 = 75$. Die Zinsen betragen 75 €.

Beispiel 2: Zinssatz

Für 1 200 € erhält man nach einem Jahr 54 € Zinsen. Wie hoch ist der Zinssatz?

$p = \frac{54}{1200} \cdot 100 = 4{,}5$. Der Zinssatz beträgt $4{,}5\,\%$.

Beispiel 3: Kapital

Bei $2\,\%$ erhält man 80 € Jahreszinsen. Welches Kapital war angelegt?

$K = \frac{80}{2} \cdot 100 = 4000$. Es waren 4 000 €.

Zinsen für Teile eines Jahres

Regel: Anteilige Zinsen

In Deutschland rechnet man im kaufmännischen Zinssystem mit 1 Jahr = 360 Tage und 1 Monat = 30 Tage. Mit der Zeit t in Tagen: $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}$. Mit m Monaten: $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$.

Beispiel 4: Monate

3 600 € werden 5 Monate zu $2{,}4\,\%$ angelegt.

$Z = 3600 \cdot 0{,}024 \cdot \frac{5}{12} = 36$. Die Zinsen betragen 36 €.

Beispiel 5: Tage

4 800 € werden 45 Tage zu $3\,\%$ angelegt.

$Z = 4800 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{45}{360} = 18$. Die Zinsen betragen 18 €.

Kapital, Zinssatz und Zeit berechnen

Beispiel 6: Zeit gesucht

Wie viele Tage dauert es, bis 2 000 € bei $3\,\%$ genau 15 € Zinsen bringen?

Pro Jahr: $2000 \cdot 0{,}03 = 60$ €. Anteil am Jahr: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$. Zeit: $\frac{1}{4} \cdot 360 = 90$ Tage, also 3 Monate.

Textaufgaben

So gehst du vor: Zinsaufgaben lösen

1. Schreibe die gegebenen Größen mit Namen auf: K, p, Z und die Zeit.
2. Wandle die Zeit in Jahre um: Monate durch 12, Tage durch 360.
3. Wähle die passende Formel und setze ein.
4. Rechne aus und prüfe, ob das Ergebnis passt: Bei kurzer Zeit müssen die Zinsen kleiner sein als die Jahreszinsen.
5. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 7: Guthaben

Frau Weber zahlt 7 500 € für 8 Monate auf ein Konto mit $1{,}8\,\%$ Zinsen ein. Welches Guthaben hat sie danach?

Zeit: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Jahr. $Z = 7500 \cdot 0{,}018 \cdot \frac{2}{3} = 90$. Guthaben: $7500 + 90 = 7590$ €.

Kredite und Zinseszins

Beispiel 8: Dispo

Wer 500 € für 60 Tage mit $12\,\%$ überzieht, zahlt wie viel?

$500 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{60}{360} = 10$ €. Das zeigt, warum man Schulden vermeiden sollte.

Hinweis

Lässt man die Zinsen auf dem Konto, werden sie im nächsten Jahr mitverzinst (Zinseszins). Aus 1 000 € bei $5\,\%$ werden nach einem Jahr 1 050 € und nach dem zweiten Jahr $1050 \cdot 1{,}05 = 1102{,}50$ €. Die genaue Behandlung folgt in höheren Klassen.

Hinweis

Banken zahlen für Guthaben einen kleineren Zinssatz, als sie für Kredite verlangen. Beim Vergleichen von Angeboten zählen auch Laufzeit, Gebühren und Prämien. Rechne deshalb immer die tatsächlichen Zinsen in Euro aus.

Beispiel 9: Zwei Angebote vergleichen

Bank A zahlt $2\,\%$ auf *5\,000\,€* für ein Jahr, Bank B zahlt $2{,}4\,\%$ auf *4\,000\,€*. Welches Angebot bringt mehr?

A: *5000\cdot0{,}02=100\,€*. B: *4000\cdot0{,}024=96\,€*. Bank A bringt *4\,€* mehr, obwohl der Zinssatz niedriger ist, weil das Kapital größer ist. Vergleiche daher nie nur die Zinssätze.

Beispiel 10: Zinsen aus Tagen mit Kapital gesucht

Für 60 Tage erhält man bei $3\,\%$ Zinsen *15\,€*. Wie groß war das Kapital?

$Z = K \cdot 0{,}03 \cdot \frac{60}{360}$, also $15 = K \cdot 0{,}005$. Daraus folgt $K = \frac{15}{0{,}005} = 3000$. Das Kapital betrug *3\,000\,€*.

Beispiel 11: Ausblick Zinseszins

***1\,000\,€* werden 2 Jahre zu $4\,\%$ angelegt, die Zinsen bleiben auf dem Konto. Wie viel ist es danach?**

Nach dem ersten Jahr: *1000\cdot1{,}04=1040\,€*. Nach dem zweiten Jahr: *1040\cdot1{,}04=1081{,}60\,€*. Mit einfacher Verzinsung wären es nur *1\,080\,€*. Der

Unterschied von *1{,}60\,€* sind die „Zinsen auf die Zinsen“.

Typische Fehler

(1) Die Zeit nicht in Jahre umrechnen: Aus 5 Monaten wird $\frac{5}{12}$, nicht 5. (2) Das Guthaben mit den Zinsen verwechseln: Zinsen sind nur der Zuwachs. (3) $p\,\%$ nicht in $\frac{p}{100}$ umwandeln. (4) Beim Vergleich nur die Zinssätze, aber nicht die Kapitalbeträge und Laufzeiten betrachten.

Wusstest du?

Zinsen sind uralt: Schon in Mesopotamien vor rund 4 000 Jahren liehen Händler Getreide und Silber gegen Zinsen aus. Die erste deutsche Sparkasse wurde 1778 in Hamburg gegründet, damit auch Menschen mit wenig Geld sparen konnten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Kapital K (Grundwert), Zinssatz $p\,\%$ (Prozentsatz), Zinsen Z (Prozentwert).
- Jahreszinsen: $Z = K \cdot \frac{p}{100}$.
- Zinsen für Monate: mal $\frac{m}{12}$, für Tage: mal $\frac{t}{360}$.
- Das kaufmännische Jahr hat 360 Tage, ein Monat 30 Tage.
- Formel nach K, p oder der Zeit umstellen.
- Guthaben $= K + Z$; Zinseszins folgt später.

Achtung

Zeitangaben müssen anteilig umgerechnet werden: 5 Monate sind $\frac{5}{12}$ Jahr, nicht 5 Jahre. Verwandle den Zinssatz in eine Dezimalzahl: $3\,\% = 0{,}03$. Das Gesamtguthaben ist $K + Z$, nicht nur Z. Das kaufmännische Jahr hat 360 Tage, nicht 365.

Vertiefung: Zinsrechnung verstehen

Einstieg: Warum zahlt die Bank Zinsen?

Wenn du Geld auf ein Sparkonto einzahlst, verleihst du es eigentlich an die Bank. Die Bank verleiht dieses Geld weiter, zum Beispiel an eine Familie, die ein Haus baut, oder an eine Firma, die eine neue Maschine kauft. Von diesen Kunden verlangt die Bank Zinsen. Einen kleinen Teil davon gibt sie an dich weiter, als Belohnung dafür, dass du ihr dein Geld überlassen hast. Zinsen sind also eine Art Leihgebühr für Geld. Wer Geld leiht, zahlt Zinsen. Wer Geld verleiht, bekommt Zinsen. Deshalb sind die Zinsen für Kredite immer höher als die Zinsen für Guthaben.

Merke: Zinsrechnung ist Prozentrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung mit neuen Namen. Das Kapital K entspricht dem Grundwert, die Zinsen Z entsprechen dem Prozentwert, und der Zinssatz $p\,\%$ entspricht dem Prozentsatz. Neu ist nur die Zeit: Liegt das Geld kürzer oder länger als ein Jahr, werden die Jahreszinsen mit dem Zeitfaktor multipliziert. Für Monate ist das $\frac{m}{12}$, für Tage $\frac{t}{360}$. Die vollständige Formel lautet $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}$.

So gehst du vor: Eine Größe aus der Zinsformel bestimmen

1. Schreibe alle gegebenen Größen mit Einheit auf und markiere die gesuchte Größe.
2. Rechne die Zeit in Tage oder Monate um. Bei Banken hat jeder Monat 30 Tage und das Jahr 360 Tage.
3. Berechne zuerst die Jahreszinsen, wenn das möglich ist. Sie sind eine gute Zwischengröße.
4. Setze in die Formel ein und stelle nach der gesuchten Größe um, genau wie bei einer Gleichung.
5. Mache einen Überschlag: Bei kleinen Zinssätzen und kurzen Zeiten sind die Zinsen nur ein kleiner Bruchteil des Kapitals.

Beispiel 12: Zinssatz für einige Monate

Ein Kapital von *6000\,€* bringt in 5 Monaten *62{,}50\,€* Zinsen. Wie hoch ist der Zinssatz?

Rechne zuerst die Zinsen auf ein ganzes Jahr hoch. In 5 Monaten gibt es *62{,}50\,€*, in einem Monat also *12{,}50\,€* und in 12 Monaten *150\,€*. Jetzt ist es eine gewöhnliche Prozentaufgabe: $p = \frac{150}{6000} \cdot 100 = 2{,}5\,\%$. Probe mit der Formel: $6000 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{5}{12} = 62{,}50$. Der Zinssatz beträgt also $2{,}5\,\%$ pro Jahr.

Beispiel 13: Endkapital nach einem Jahr

Wie viel Geld hat man nach einem Jahr, wenn man *1250\,€* zu $2{,}4\,\%$ anlegt?

Man kann die Zinsen getrennt ausrechnen, *1250\cdot0{,}024=30\,€*, und dann addieren: *1250+30=1280\,€*. Schneller geht es mit dem Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}024$: *1250\cdot1{,}024=1280\,€*. Der Zinsfaktor ist dasselbe wie der Wachstumsfaktor aus der Prozentrechnung. Er ist besonders praktisch, wenn man mehrere Jahre nacheinander berechnen will.

Achtung: Monate und Tage verwechseln

Ein häufiger Fehler ist, die Monate in den Zeitfaktor für Tage einzusetzen, also $\frac{6}{360}$ statt $\frac{6}{12}$ für ein halbes Jahr. Das Ergebnis wäre dreißigmal zu klein. Prüfe deshalb immer: Bei Monaten steht 12 im Nenner, bei Tagen 360. Ein halbes Jahr ergibt in beiden Fällen den Faktor $\frac{1}{2}$, denn $\frac{6}{12} = \frac{180}{360}$.

Schon gewusst?

Zinsen gibt es schon seit über 4000 Jahren. In Mesopotamien verliehen Tempel Getreide und verlangten bei der Rückgabe mehr zurück, als sie verliehen hatten. Im Mittelalter war das Zinsnehmen in Europa für Christen lange verboten. Die moderne Bankenwelt entstand vor allem in Italien, und viele Begriffe stammen von dort: „Konto“ von „conto“ (Rechnung), „Bank“ von „banco“ (der Tisch der Geldwechsler) und „Saldo“ von „saldo“ (Ausgleich). Wer heute einen Kredit aufnimmt, sollte immer den effektiven Jahreszins vergleichen, denn er enthält auch versteckte Gebühren.

Beispiel 14: Die Zeit gesucht

Nach wie vielen Tagen bringen *3600\,€* bei $2\,\%$ genau *12\,€* Zinsen?

Berechne zuerst die Jahreszinsen: *3600\cdot0{,}02=72\,€*. Die gesuchten Zinsen sind $\frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ davon. Ein Sechstel Jahr sind $360 : 6 = 60$ Tage. Das Geld muss also 60 Tage, das heißt zwei Monate, angelegt bleiben. Probe: *72\cdot\frac{60}{360}=12\,€*. Bei Aufgaben mit gesuchter Zeit lohnt sich der Umweg über die Jahreszinsen fast immer, weil man danach nur noch einen einfachen Bruchteil des Jahres bestimmen muss.

Ottos Tipp

Rechne zuerst die Jahreszinsen aus und bestimme dann den Anteil der Zeit. Bei der Zeit hilft: 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahr, 1 Tag = $\frac{1}{360}$ Jahr. Schreibe am Ende immer einen Antwortsatz mit der Einheit Euro.