Lösungen - Zinsrechnung

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

a) Das Kapital K ist der angelegte Betrag: *800\,€*. Der Zinssatz gibt an, wie viel Prozent es pro Jahr gibt: $p\,\% = 2{,}5\,\%$. Die Zinsen sind der gutgeschriebene Betrag: *Z=20\,€*.

b) Neues Guthaben = Kapital plus Zinsen: *800+20=820\,€*.

c) *Z=K\cdot\frac{p}{100}=800\cdot\frac{2{,}5}{100}=800\cdot0{,}025=20\,€*. Das stimmt mit der Angabe der Bank überein.

Antwort: Lena hat nach einem Jahr *820\,€*.

Lösung zu Aufgabe 2

Man setzt in $Z = K \cdot \frac{p}{100}$ ein und rechnet den Prozentsatz als Dezimalzahl.

a) *Z=800\cdot0{,}02=16{,}00\,€*.

b) *Z=1500\cdot0{,}035=52{,}50\,€*.

c) *Z=2400\cdot0{,}005=12{,}00\,€*. Beachte: $0{,}5\,\% = 0{,}005$.

d) *Z=12000\cdot0{,}0125=150{,}00\,€*.

Überschlag zu d): $1\,\%$ von 12 000 € sind 120 €, ein Viertel Prozent mehr sind 30 €, zusammen 150 €.

Die Zinsen wachsen proportional zum Kapital und zum Zinssatz: Doppeltes Kapital bringt doppelte Zinsen.

Lösung zu Aufgabe 3

Gesucht ist der Zinssatz: $p = \frac{Z}{K} \cdot 100$.

a) $p = \frac{40}{1600} \cdot 100 = 0{,}025 \cdot 100 = 2{,}5\,\%$.

b) $p = \frac{63}{1800} \cdot 100 = 0{,}035 \cdot 100 = 3{,}5\,\%$.

c) $p = \frac{9}{600} \cdot 100 = 0{,}015 \cdot 100 = 1{,}5\,\%$.

Probe zu b): *1800\cdot0{,}035=63\,€*. Antwort: Die Zinssätze betragen $2{,}5\,\%$, $3{,}5\,\%$ und $1{,}5\,\%$.

Zur Kontrolle rechnet man rückwärts: Kapital mal Zinssatz muss die angegebenen Zinsen ergeben. Bei a) etwa $1600 \cdot 0{,}025 = 40$. Die Rechnung entspricht in der Prozentrechnung der Frage nach dem Prozentsatz.

Lösung zu Aufgabe 4

Gesucht ist das Kapital: $K = \frac{Z}{p} \cdot 100$. Über den Dreisatz: $p\,\%$ entsprechen Z, also $1\,\%$ entspricht $\frac{Z}{p}$, und $100\,\%$ entsprechen $\frac{Z}{p} \cdot 100$.

a) $K=\frac{45}{1{,}5}\cdot100=30\cdot100=3000\,€$.

b) $K=\frac{84}{2{,}1}\cdot100=40\cdot100=4000\,€$.

c) $K=\frac{130}{2{,}6}\cdot100=50\cdot100=5000\,€$.

Probe zu c): $5000\cdot0{,}026=130\,€$.

Diese Aufgabe entspricht in der Prozentrechnung der Frage nach dem Grundwert. Je kleiner der Zinssatz ist, desto größer muss das Kapital für dieselben Zinsen sein.

Lösung zu Aufgabe 5

Formel: $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$ bzw. $\cdot \frac{t}{360}$.

a) Jahreszinsen $2400\cdot0{,}03=72\,€$, für ein halbes Jahr: $72\cdot\frac{6}{12}=36{,}00\,€$.

b) Jahreszinsen $36\,€$, 90 Tage sind ein Viertel Jahr: $36\cdot\frac{90}{360}=9{,}00\,€$.

c) Jahreszinsen $60\,€$: $60\cdot\frac{45}{360}=7{,}50\,€$.

d) Jahreszinsen $90\,€$: $90\cdot\frac{8}{12}=60{,}00\,€$.

Antwort: 36 €, 9 €, 7,50 € und 60 €.

Wichtig: Im Bankwesen hat jeder Monat 30 Tage und das Jahr 360 Tage. Bei Monaten steht im Zeitfaktor deshalb 12 im Nenner, bei Tagen 360.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $Z=450\cdot0{,}016=7{,}20\,€$.

b) $450+7{,}20=457{,}20\,€$.

c) Für 8 Monate nimmt man $\frac{8}{12}$ der Jahreszinsen: $7{,}20\cdot\frac{8}{12}=4{,}80\,€$.

d) $p = \frac{18}{450} \cdot 100 = 4\,\%$.

Antwort: Lisa erhält nach einem Jahr $7{,}20\,€$ Zinsen; für $18\,€$ Zinsen wäre ein Zinssatz von $4\,\%$ nötig, also das Zweieinhalbfache.

Kontrolle zu c): Acht Monate sind zwei Drittel eines Jahres, und zwei Drittel von 7,20 € sind 4,80 €.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Vom 1. März bis 31. Mai sind es 3 Monate: $Z=12500\cdot0{,}024\cdot\frac{3}{12}=300\cdot\frac14=75{,}00\,€$.

b) Auszahlung: $12500+75=12\,575{,}00\,€$.

c) Bei $3\,\%$: $12500\cdot0{,}03\cdot\frac{3}{12}=93{,}75\,€$. Das wären $93{,}75-75=18{,}75\,€$ mehr.

d) Jahreszinsen bei $2{,}4\,\%$: $300\,€$. $150\,€$ sind die Hälfte davon, also braucht man ein halbes Jahr: 180 Tage.

Man sieht: Schon ein halber Prozentpunkt mehr bringt bei großen Beträgen spürbar mehr Zinsen. Ein Vergleich der Angebote lohnt sich also.

Lösung zu Aufgabe 8

a) A: $4000\cdot0{,}018=72{,}00\,€$. B: $3000\cdot0{,}022=66{,}00\,€$. C: $5000\cdot0{,}015=75{,}00\,€$.

b) Den höchsten Zinssatz bietet B mit $2{,}2\,\%$. Die meisten Zinsen bringt aber C mit $75\,€$, weil dort das Kapital am größten ist. Die Höhe der Zinsen hängt von Kapital und Zinssatz gemeinsam ab.

c) $75-66=9{,}00\,€$.

Antwort: Bei B entgehen im Vergleich zu C 9 € Zinsen. Man kann die Angebote aber nur fair vergleichen, wenn das Kapital gleich ist.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $Z=900\cdot0{,}115\cdot\frac{40}{360}=103{,}5\cdot\frac{1}{9}=11{,}50\,€$.

b) $Z=600\cdot0{,}12\cdot\frac{30}{360}=72\cdot\frac{1}{12}=6{,}00\,€$.

c) Jahreszinsen: $800\cdot0{,}108=86{,}40\,€$. Anteil: $\frac{7{,}20}{86{,}40}=\frac{1}{12}$, also ein Monat bzw. 30 Tage.

d) Beim Dispo leiht die Bank Geld sofort, ohne Antrag und ohne Sicherheiten. Das Risiko ist für sie höher, deshalb verlangt sie hohe Zinsen. Auf dem Sparbuch bekommt man dagegen nur wenige Prozent. Überziehungen sollte man daher möglichst vermeiden.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Zinsen für 10 Monate: $900\cdot0{,}06\cdot\frac{10}{12}=54\cdot\frac{10}{12}=45{,}00\,€$.

b) Gesamtbetrag $900+45=945\,€$, verteilt auf 10 Raten: $945:10=94{,}50\,€$ pro Monat.

c) Bei Barzahlung zahlt man $97\,\%$: $900\cdot0{,}97=873{,}00\,€$.

d) $945-873=72{,}00\,€$.

Antwort: Wer bar bezahlen kann, spart 72 €. Der Ratenkauf ist bequem, aber deutlich teurer.

Der effektive Aufpreis des Ratenkaufs beträgt also 72 € auf einen Barpreis von 873 €, das sind gut 8 %.

Lösung zu Aufgabe 11

Gesucht ist jeweils das Kapital: $K = \frac{Z}{p} \cdot 100$.

a) *K=\frac{60}{2}\cdot100=3000\,€*.

b) *K=\frac{60}{3}\cdot100=2000\,€*.

c) *K=\frac{60}{1{,}5}\cdot100=4000\,€*.

d) Steigt der Zinssatz, braucht man weniger Kapital. Das Produkt aus Kapital und Zinssatz bleibt gleich ($3000 \cdot 2 = 2000 \cdot 3 = 4000 \cdot 1{,}5 = 6000$). Die Zuordnung Zinssatz → Kapital ist daher antiproportional.

Für die Rechnung nutzt man den Dreisatz: Wenn 2 % des Kapitals 60 € sind, dann ist 1 % gleich 30 € und 100 % sind 3000 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Zinsen für 9 Monate auf ein Jahr hochrechnen: *56{,}25:9\cdot12=75\,€*. Zinssatz: $p = \frac{75}{3000} \cdot 100 = 2{,}5\,\%$.

b) Jahreszinsen: *24:4\cdot12=72\,€*. Kapital: *K=\frac{72}{1{,}8}\cdot100=4000\,€*.

c) Jahreszinsen: *6000\cdot0{,}015=90\,€*. Anteil: $\frac{27}{90} = 0{,}3$ Jahre, also $0{,}3 \cdot 360 = 108$ Tage.

Tipp: Wer zuerst auf Jahreszinsen umrechnet, kann danach mit den einfachen Formeln für ein Jahr weiterrechnen.

In jeder Teilaufgabe wird dieselbe Formel $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}$ benutzt, nur nach einer anderen Größe umgestellt.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Frau Berg, ein ganzes Jahr: *2000\cdot0{,}02=40{,}00\,€*. Schwester, ein halbes Jahr: *1500\cdot0{,}02\cdot\frac{6}{12}=15{,}00\,€*.

b) Zusammen: *40+15=55{,}00\,€*.

c) Gesucht ist der Zinssatz für *3500\,€* und *55\,€* Zinsen: $p = \frac{55}{3500} \cdot 100 \approx 1{,}57\,\%$.

Er ist kleiner als $2\,\%$, weil ein Teil des Geldes in Wirklichkeit nur ein halbes Jahr angelegt war.

Man darf die Kapitalbeträge nicht einfach addieren und mit 2 % verzinsen, weil die Anlagedauer verschieden ist.

Lösung zu Aufgabe 14

a) *Z=18000\cdot0{,}012=216{,}00\,€*.

b) Romane: *216\cdot0{,}75=162{,}00\,€*. Sachbücher erhalten den Rest, also $25\,\%$: *216-162=54{,}00\,€*.

c) Ein Quartal ist ein Viertel Jahr: *216:4=54{,}00\,€*.

d) Bei $1{,}5\,\%$: *18000\cdot0{,}015=270\,€*. Das sind *270-216=54{,}00\,€* mehr pro Jahr.

Antwort: Der Förderverein kann jährlich Bücher für 216 € kaufen.

Probe zu b): $162 + 54 = 216$. Zusammen ergeben Romane und Sachbücher wieder die gesamten Jahreszinsen.

Lösung zu Aufgabe 15

a) 18 Monate sind $\frac{18}{12} = 1{,}5$ Jahre: *Z_A=8000\cdot0{,}054\cdot1{,}5=648{,}00\,€*.

b) *Z_B=8000\cdot0{,}048\cdot1{,}5=576\,€*. Mit Gebühr: *576+120=696{,}00\,€*.

c) Bank A ist günstiger, und zwar um *696-648=48{,}00\,€*. Der niedrigere Zinssatz von B wird durch die Gebühr mehr als aufgezehrt.

d) Rückzahlung bei A: *8000+648=8648\,€*, pro Monat *8648:18\approx480{,}44\,€*.

e) B wäre gleich teuer bei *648-576=72\,€* Gebühr. Bei mehr als 72 € ist B teurer.

Lösung zu Aufgabe 16

a) *5000\cdot0{,}024\cdot\frac{4}{12}=120\cdot\frac13=40{,}00\,€*.

b) *3800\cdot0{,}024\cdot\frac{8}{12}=91{,}20\cdot\frac23=60{,}80\,€*.

c) *40+60{,}80=100{,}80\,€*.

d) Ohne Abhebung: *5000\cdot0{,}024=120{,}00\,€*. Unterschied: *120-100{,}80=19{,}20\,€*. Das sind genau die Zinsen, die die *1200\,€* in 8 Monaten gebracht hätten: $1200 \cdot 0{,}024 \cdot \frac{8}{12} = 19{,}20$.

e) *3800+100{,}80=3900{,}80\,€*.

Man rechnet also jeden Zeitraum mit seinem eigenen Guthaben getrennt und addiert am Ende die Teilzinsen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Festgeld: *6000\cdot0{,}029=174{,}00\,€*. Tagesgeld: *6000\cdot0{,}021=126{,}00\,€*.

b) *174-126=48{,}00\,€* mehr beim Festgeld.

c) Nach 7 Monaten: Tagesgeld *6000\cdot0{,}021\cdot\frac{7}{12}=73{,}50\,€*. Festgeld mit gesenktem Zinssatz: *6000\cdot0{,}005\cdot\frac{7}{12}=17{,}50\,€*.

d) Braucht die Familie das Geld sicher ein Jahr nicht, ist das Festgeld besser (48 € mehr). Ist sie unsicher, empfiehlt sich das Tagesgeld, denn bei vorzeitiger Auflösung des Festgelds verliert sie in diesem Beispiel 56 € Zinsen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Mit $Z = K \cdot 0{,}108 \cdot \frac{t}{360}$: Zeitraum 1: *300\cdot0{,}108\cdot\frac{20}{360}=1{,}80\,€*. Zeitraum 2: *750\cdot0{,}108\cdot\frac{12}{360}=2{,}70\,€*. Zeitraum 3: *150\cdot0{,}108\cdot\frac{30}{360}=1{,}35\,€*.

b) *1{,}80+2{,}70+1{,}35=5{,}85\,€*.

c) *750\cdot0{,}04\cdot\frac{12}{360}=1{,}00\,€*; Ersparnis *1{,}70\,€*.

d) Ein ganzes Jahr kostet *750\cdot0{,}108=81{,}00\,€*. Für kurze Zeiträume sind die Beträge klein, Marie hat also teilweise recht. Bleibt das Konto aber dauerhaft im Minus, wird es sehr teuer.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Bank X verzinst jedes Jahr nur die *2000\,€*: *2000\cdot0{,}03=60\,€* pro Jahr, in 3 Jahren *180{,}00\,€*.

b) Bank Y, jedes Jahr mal $1{,}03$: nach 1 Jahr *2060{,}00\,€*, nach 2 Jahren *2060\cdot1{,}03=2121{,}80\,€*, nach 3 Jahren *2121{,}80\cdot1{,}03\approx2185{,}45\,€*.

c) Zinsen bei Y: *185{,}45\,€*. Unterschied: *5{,}45\,€*. Er entsteht, weil bei Y auch die Zinsen der Vorjahre verzinst werden.

d) $\frac{185{,}45}{2000} \approx 9{,}27\,\%$ des Anfangskapitals statt $9\,\%$, also etwa $0{,}27$ Prozentpunkte mehr.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Verdopplung heißt: Die Zinsen in 20 Jahren sind so groß wie das Kapital, also $100\,\%$. Pro Jahr: $100\,\% : 20 = 5\,\%$.

b) Bei $4\,\%$ pro Jahr braucht man $100 : 4 = 25$ Jahre.

c) $1{,}05^{20} \approx 2{,}65$. Bei Zinseszins werden die Zinsen jedes Jahr dem Kapital zugeschlagen und im nächsten Jahr mitverzinst. Das Kapital, auf das die 5 % berechnet werden, wird also immer größer. Deshalb wächst das Geld schneller als bei einfacher Verzinsung und hat sich nach 20 Jahren mehr als verdoppelt.