Lernzettel - Winkel an Geraden und im Dreieck

Klasse: Klasse 7

An Geraden und in Dreiecken stehen Winkel in festen Beziehungen. Mit ein paar Sätzen berechnest du fehlende Winkel, ohne sie zu messen.

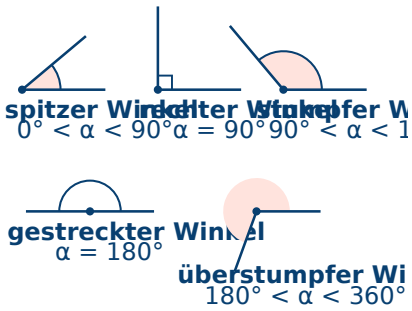
Einstieg: Die Klappleiter

Eine Klappleiter steht aufgeklappt auf dem Boden. Zwischen den beiden Leiterschenkeln liegt ein Winkel von 40°. Wie groß sind dann die beiden Winkel zum Boden, wenn die Leiter gleich lange Schenkel hat? Das Dreieck aus Boden und zwei Schenkeln ist gleichschenklig, die Basiswinkel sind gleich: $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Ohne zu messen, hast du Winkel bestimmt. Genau das lernst du in diesem Kapitel: Mit wenigen Sätzen kannst du fehlende Winkel berechnen.

Winkel und ihre Arten

Definition: Winkel

Ein **Winkel** entsteht, wenn zwei Strahlen von einem gemeinsamen Punkt, dem **Scheitel**, ausgehen. Die Strahlen heißen **Schenkel**. Man misst Winkel in Grad ($^\circ$).



Regel: Winkelarten

Spitzer Winkel: 0°. Rechter Winkel: 90°. Stumpfer Winkel: 90°. Gestreckter Winkel: 180°. Überstumpfer Winkel: 180°. Vollwinkel: 360°.

So gehst du vor: Winkel messen

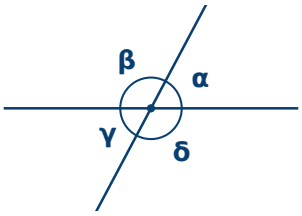
1. Lege den Nullpunkt des Geodreiecks genau auf den Scheitel und die Nulllinie auf einen Schenkel.
2. Lies am zweiten Schenkel den Wert auf der richtigen Skala ab. Ein spitzer Winkel hat einen Wert unter 90°, ein stumpfer einen darüber.

3. Beim Zeichnen gehst du umgekehrt vor: Schenkel zeichnen, Geodreieck anlegen, Wert markieren, Markierung mit dem Scheitel verbinden.

Winkel an sich schneidenden Geraden

Definition: Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, entstehen vier Winkel. **Nebenwinkel** liegen nebeneinander und ergänzen sich zu $180°$: $\alpha + \beta = 180°$. **Scheitelwinkel** liegen sich gegenüber und sind gleich groß: $\alpha = \gamma$.



Beispiel 1: Vier Winkel

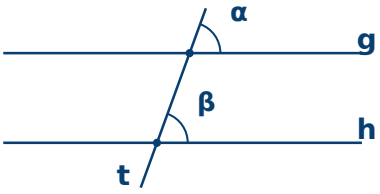
Zwei Geraden schneiden sich, ein Winkel beträgt $\alpha = 65°$. Wie groß sind die anderen?

Der Nebenwinkel ist $\beta = 180° - 65° = 115°$. Der Scheitelwinkel zu α ist wieder $65°$, der zu β ist $115°$.

Winkel an Parallelen

Satz: Winkel an Parallelen

Wird ein Paar paralleler Geraden $g \parallel h$ von einer dritten Geraden geschnitten, entstehen acht Winkel. **Stufenwinkel** (F-Winkel) liegen an gleicher Stelle der beiden Kreuzungen und sind gleich groß. **Wechselwinkel** (Z-Winkel) liegen auf verschiedenen Seiten der Schneidenden zwischen den Parallelen und sind gleich groß. Winkel zwischen den Parallelen auf derselben Seite (E-Winkel) ergänzen sich zu $180°$.



Merke: Umkehrung

Sind Stufen- oder Wechselwinkel gleich groß, so sind die Geraden parallel.

Beispiel 2: Parallelen

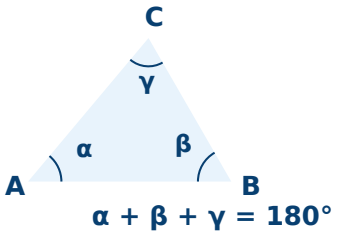
Gegeben $g \parallel h$ und ein Winkel von 70° an g. Welche Winkel gibt es an h?

Der Stufenwinkel an h beträgt 70°, der Wechselwinkel ebenfalls 70°, der E-Winkel 110°.

Winkelsumme im Dreieck

Satz: Winkelsumme im Dreieck

In jedem Dreieck gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Begründung: Zeichnet man durch C die Parallele zu AB, erscheinen α und β als Wechselwinkel neben γ. Zusammen bilden die drei Winkel einen gestreckten Winkel.



Satz: Außenwinkel

Der Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Der Außenwinkel bei C ist $\alpha + \beta$.

Beispiel 3: Dritter Winkel

Im Dreieck sind $\alpha = 48^\circ$ und $\beta = 77^\circ$. Berechne γ und den Außenwinkel bei C.

$\gamma = 180^\circ - 48^\circ - 77^\circ = 55^\circ$. Der Außenwinkel bei C beträgt $48^\circ + 77^\circ = 125^\circ$.

Beispiel 4: Messung kontrollieren

In einem Dreieck wird $\alpha = 62^\circ$ und $\beta = 47^\circ$ gemessen. Welchen Wert hat γ?

Aus der Winkelsumme folgt $\gamma = 71^\circ$. Misst du γ nach und erhältst etwa 71°, ist die Messung in Ordnung.

Besondere Dreiecke

Definition: Besondere Dreiecke

Im **gleichschenkligen** Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß. Im **gleichseitigen** Dreieck ist jeder Winkel 60°. Im **rechtwinkligen** Dreieck sind die beiden spitzen Winkel zusammen 90°.



Beispiel 5: Gleichschenklig

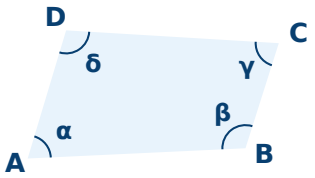
Ein gleichschenkliges Dreieck hat an der Spitze $\gamma = 40^\circ$. Wie groß sind die Basiswinkel?

$\alpha = \beta = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Winkelsumme im Viereck

Satz: Winkelsumme im Viereck

Ein Viereck lässt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Daher beträgt die Winkelsumme $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Allgemein hat ein n-Eck die Winkelsumme $(n-2) \cdot 180^\circ$. Beim Fünfeck sind es 540°.



Winkel berechnen

So gehst du vor: Winkel berechnen

1. Fertige eine Skizze an und beschrifte alle bekannten Winkel.
2. Suche Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufen- oder Wechselwinkel und Dreiecke.
3. Berechne den neuen Winkel und begründe ihn mit dem passenden Satz, zum Beispiel „Nebenwinkel“ oder „Winkelsumme im Dreieck“.
4. Schreibe die Begründung in Klammern hinter die Rechnung.

Hinweis

Der Stundenzeiger einer Uhr dreht sich pro Stunde um 30°, der Minutenzeiger pro Minute um 6°. Handwerker und Architekten nutzen die Sätze über Parallelen und Dreiecke, um Maße zu berechnen, ohne sie zu messen.

Beispiel 6: Im Alltag (Dachgiebel)

Ein Giebel ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Dachneigung 35°. Wie groß ist der Winkel am First?

Basiswinkel 35° und 35°. Winkel am First: $180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.

Beispiel 7: Parallelen mit Term

An zwei parallelen Geraden sind zwei Stufenwinkel $3x + 10^\circ$ und $5x - 20^\circ$. Bestimme x.

Stufenwinkel sind gleich: $3x + 10 = 5x - 20$, also $30 = 2x$, $x = 15$. Beide Winkel sind 55°.

Beispiel 8: Winkelsumme im n-Eck

Wie groß ist jeder Winkel im regelmäßigen Achteck?

Das Achteck lässt sich in 6 Dreiecke zerlegen: Summe $6 \cdot 180^\circ = 1\,080^\circ$. Jeder Winkel: $\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$.

Typische Fehler

(1) Nebenwinkel und Scheitelwinkel verwechseln. (2) Stufenwinkel und E-Winkel verwechseln: Stufenwinkel sind gleich, E-Winkel ergänzen sich zu 180°. (3) Die Sätze für Parallelen anwenden, ohne dass die Geraden parallel sind. (4) Bei gleichschenkligen Dreiecken den falschen Winkel verdoppeln. (5) Mit dem Geodreieck an der falschen Skala ablesen.

Wusstest du?

Die Einteilung des Kreises in 360 Grad stammt von den Babyloniern, die mit der Zahl 60 rechneten. 360 hat sehr viele Teiler, deshalb lässt sich der Kreis leicht in gleiche Teile teilen. Die Winkelsumme im Dreieck war schon dem griechischen Gelehrten Euklid bekannt, der um 300 v. Chr. lebte.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°, Scheitelwinkel sind gleich.
- An Parallelen sind Stufen- und Wechselwinkel gleich, E-Winkel ergänzen sich zu 180°.
- Winkelsumme im Dreieck: 180°, im Viereck: 360°.
- Außenwinkel = Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
- Gleichschenklig: Basiswinkel gleich; gleichseitig: je 60°.
- Winkelsumme im n-Eck: $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Achtung

Verwechsle Stufen- und Wechselwinkel nicht. Nebenwinkel sind nicht gleich groß, sondern ergänzen sich zu $180°$. Stufen- und Wechselwinkel darfst du nur verwenden, wenn die Geraden parallel sind. Die Winkelsumme im Dreieck ist $180°$, nicht $360°$.

Vertiefung: Winkel begründen statt messen

Einstieg: Warum immer 180°?

Schneide aus Papier ein beliebiges Dreieck aus und reiße die drei Ecken ab. Legt man die drei Ecken mit ihren Spitzen aneinander, bilden sie zusammen immer eine gerade Linie, also einen gestreckten Winkel von $180°$. Das funktioniert bei spitzen, stumpfen und rechtwinkligen Dreiecken gleichermaßen. Ein solcher Versuch überzeugt, ist aber noch kein Beweis, denn man kann nicht alle Dreiecke ausprobieren. Mit den Winkelsätzen an Parallelen lässt sich dagegen zeigen, dass die Aussage für jedes Dreieck gilt. In der Geometrie werden Winkel deshalb meist nicht gemessen, sondern mit Sätzen begründet und berechnet.

Merke: Der Beweis der Winkelsumme

Zeichne durch die Ecke C eines Dreiecks die Parallele g zur Seite AB. An C entstehen dann drei Winkel, die zusammen einen gestreckten Winkel bilden. Der linke Winkel ist Wechselwinkel zu α, der rechte ist Wechselwinkel zu β, und in der Mitte liegt γ. Weil Wechselwinkel an Parallelen gleich groß sind, gilt $\alpha + \gamma + \beta = 180°$. Damit ist die Winkelsumme für jedes Dreieck bewiesen.

So gehst du vor: Eine Winkelberechnung begründen

1. Markiere in der Figur alle gegebenen Winkel und die gesuchten Winkel mit Farbe.
2. Suche Beziehungen: Nebenwinkel (Summe $180°$), Scheitelwinkel (gleich), Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen (gleich), Winkelsumme im Dreieck oder Viereck.
3. Schreibe jeden Rechenschritt mit Begründung auf, zum Beispiel „$\beta = 70°$ (Wechselwinkel zu α)“.
4. Prüfe am Ende, ob alle Winkelsummen stimmen.

Beispiel 9: Eine Begründungskette

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Spitze C ist der Außenwinkel bei A gleich $110°$. Berechne alle Innenwinkel.

Der Innenwinkel bei A ist der Nebenwinkel des Außenwinkels: $\alpha = 180° - 110° = 70°$. Da das Dreieck gleichschenklig mit Spitze C ist, sind die Basiswinkel gleich: $\beta = \alpha = 70°$. Mit der Winkelsumme folgt $\gamma = 180° - 70° - 70° = 40°$. Jeder Schritt stützt sich auf einen bekannten Satz. So entsteht eine lückenlose Begründungskette.

Achtung: Parallelität nicht voraussetzen

Die Sätze über Stufen- und Wechselwinkel gelten nur, wenn die Geraden wirklich parallel sind. Sieht eine Zeichnung nur so aus, darfst du die Sätze nicht verwenden. Umgekehrt kannst du mit gleich großen Stufenwinkeln beweisen, dass zwei Geraden parallel sind. Achte deshalb genau darauf, was im Aufgabentext gegeben ist und was du erst zeigen sollst.

Schon gewusst?

Dass ein Vollwinkel 360° hat, geht vermutlich auf die Babylonier zurück. Sie rechneten im Sechzigersystem und beobachteten, dass die Sonne in etwa 360 Tagen einmal ihren Lauf am Himmel vollendet. Die Zahl 360 hat außerdem sehr viele Teiler (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 und viele mehr), sodass sich der Vollwinkel bequem in gleiche Teile zerlegen lässt. Das ist auch der Grund, warum eine Stunde 60 Minuten und eine Minute 60 Sekunden hat.

Beispiel: Winkel an einer Kreuzung mit Parallelen

Zwei parallele Gleise werden von einer Straße geschnitten. Am ersten Gleis misst man 65°. Welche Winkel entstehen am zweiten Gleis?

Da die Gleise parallel sind, ist der Stufenwinkel am zweiten Gleis ebenfalls 65°. Sein Nebenwinkel beträgt $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, und die beiden Scheitelwinkel wiederholen diese Werte. An jedem Schnittpunkt treten also nur die beiden Größen 65° und 115° auf.

Ottos Tipp

Merke dir die Buchstaben: Der F-Winkel heißt Stufenwinkel und ist gleich, der Z-Winkel heißt Wechselwinkel und ist gleich, der E-Winkel ergänzt sich zu 180°. Zeichne F, Z und E in deine Skizze, dann findest du die passenden Winkel schnell.