Lösungen - Winkel an Geraden und im Dreieck

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

a) Man vergleicht mit den Grenzen $90°$, $180°$ und $360°$: $35°$ ist spitz (kleiner als $90°$), $90°$ ist ein rechter Winkel, $140°$ ist stumpf (zwischen $90°$ und $180°$), $180°$ ist gestreckt, $200°$ ist überstumpf (zwischen $180°$ und $360°$) und $360°$ ist ein Vollwinkel.

b) Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$: $180° - 65° = 115°$; $180° - 112° = 68°$; $180° - 90° = 90°$. Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist wieder ein rechter Winkel.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Der Scheitelwinkel von α liegt gegenüber und ist gleich groß: $53°$. Die beiden anderen Winkel sind Nebenwinkel von α und ergänzen ihn zu $180°$: $180° - 53° = 127°$. Sie sind untereinander Scheitelwinkel, also beide $127°$. Kontrolle: $2 \cdot 53° + 2 \cdot 127° = 360°$.

b) Aus $\alpha + \alpha = 180°$ folgt $\alpha = 90°$. Alle vier Winkel sind rechte Winkel, die Geraden stehen senkrecht aufeinander.

c) $\alpha + 2\alpha = 180°$, also $3\alpha = 180°$ und $\alpha = 60°$. Der Nebenwinkel ist $120°$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) An Parallelen sind Stufenwinkel und Wechselwinkel gleich groß: beide $70°$. Der E-Winkel (Nachbarwinkel) ergänzt den Winkel zu $180°$: $110°$.

b) Der Stufenwinkel an h ist ebenfalls $125°$. Sein Nebenwinkel beträgt $180° - 125° = 55°$.

c) Wären die Geraden parallel, müssten die Stufenwinkel gleich sein. Da $78° \neq 82°$, sind die Geraden nicht parallel. Sie schneiden sich irgendwo, und zwar unter einem Winkel von $4°$.

Lösung zu Aufgabe 4

Man nutzt jeweils $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

a) $\gamma = 180° - 35° - 90° = 55°$. Das Dreieck ist rechtwinklig.

b) $\beta = 180° - 58° - 64° = 58°$. Da $\alpha = \beta$, ist das Dreieck gleichschenklig.

c) Für α und β bleiben $180° - 72° = 108°$. Da sie gleich sind: $108° : 2 = 54°$.

d) $\alpha + 2\alpha + 60° = 180°$, also $3\alpha = 120°$, $\alpha = 40°$ und $\beta = 80°$.

Kontrolle d): $40° + 80° + 60° = 180°$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich. Für beide bleiben $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, also je 70°.

b) Die Spitze ist $180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$.

c) Im rechtwinkligen Dreieck ergeben die beiden spitzen Winkel zusammen 90°: $\beta = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

d) Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel gleich: $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Antwort: 70°; 70°; 62°; 60°.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ$.

b) Der Außenwinkel bei C ist der Nebenwinkel von γ: $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. Das ist genau $\alpha + \beta = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$. Allgemein gilt: Ein Außenwinkel ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

c) Bei A: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$. Bei B: $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. Bei C: 115°. Summe: $130^\circ + 115^\circ + 115^\circ = 360^\circ$. Die Außenwinkel eines Dreiecks ergeben immer zusammen 360°.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $85^\circ + 102^\circ + 76^\circ = 263^\circ$. Vierter Winkel: $360^\circ - 263^\circ = 97^\circ$.

b) Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich, benachbarte ergänzen sich zu 180° (E-Winkel an Parallelen). Also $\beta = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, $\gamma = \alpha = 65^\circ$, $\delta = \beta = 115^\circ$. Kontrolle: $2 \cdot 65^\circ + 2 \cdot 115^\circ = 360^\circ$.

c) $360^\circ : 4 = 90^\circ$. Jeder Winkel eines Rechtecks ist ein rechter Winkel.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Winkelsumme: $x + 2x + 3x = 180^\circ$, also $6x = 180^\circ$ und $x = 30^\circ$. Die Winkel sind 30°, 60° und 90°. Das Dreieck ist rechtwinklig.

b) $x + (x + 20^\circ) + (x + 40^\circ) = 180^\circ$, also $3x + 60^\circ = 180^\circ$, $3x = 120^\circ$, $x = 40^\circ$. Die Winkel: 40°, 60°, 80°.

c) Im Viereck: $4x + 60^\circ = 360^\circ$, $4x = 300^\circ$, $x = 75^\circ$. Die Winkel: 75°, 85°, 95°, 105°.

Probe c): $75 + 85 + 95 + 105 = 360$.

Lösung zu Aufgabe 9

Der Giebel ist gleichschenklig, die beiden Basiswinkel entsprechen der Dachneigung.

a) Winkel am First: $180^\circ - 2 \cdot 38^\circ = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

b) Für die beiden Basiswinkel bleiben $180° - 90° = 90°$, also je $45°$.

c) $(180° - 120°) : 2 = 60° : 2 = 30°$.

Antwort: $104°$; $45°$; $30°$. Je flacher das Dach, desto größer ist der Winkel am First.

Lösung zu Aufgabe 10

Die drei Rohre bilden ein Dreieck, also gilt die Winkelsumme von $180°$.

a) $180° - 68° - 72° = 40°$.

b) $180° - 73° - 72° = 180° - 145° = 35°$.

c) Der erste Rahmen hat am Tretlager $40°$, der zweite nur $35°$. Der erste Rahmen hat also den größeren Winkel.

Je größer ein Winkel im Dreieck ist, desto weiter öffnet er sich. Das zweite Rad hat also einen etwas steileren Lenkwinkel und einen spitzeren Winkel am Tretlager.

Lösung zu Aufgabe 11

Mast, Boden und Sonnenstrahl bilden ein rechtwinkliges Dreieck, denn der Mast steht senkrecht auf dem Boden.

a) Die beiden spitzen Winkel ergeben zusammen $90°$: $90° - 40° = 50°$.

b) $90° - 20° = 70°$.

c) Bei $20°$. Je flacher die Sonnenstrahlen einfallen, desto weiter trifft der Strahl über die Mastspitze hinweg auf den Boden, und der Schatten wird länger. Deshalb sind Schatten im Winter und am Abend besonders lang.

Lösung zu Aufgabe 12

Der Minutenzeiger bewegt sich um $6°$ pro Minute, der Stundenzeiger um $30°$ pro Stunde. Gemessen wird ab der 12.

a) Um 3:00 Uhr: $3 \cdot 30° = 90°$. Um 4:00 Uhr: $120°$. Um 6:00 Uhr: $180°$, die Zeiger bilden einen gestreckten Winkel.

b) Um 1:30 Uhr steht der Minutenzeiger bei $30 \cdot 6° = 180°$, der Stundenzeiger bei $45°$. Winkel: $180° - 45° = 135°$.

c) Um 12:20 Uhr: Minutenzeiger $20 \cdot 6° = 120°$, Stundenzeiger $10°$. Winkel: $110°$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Da $g \parallel h$, sind Stufen- und Wechselwinkel gleich: An h treten zwei Winkel von $55°$ auf und zwei Nebenwinkel von $180° - 55° = 125°$.

b) Beim Abbiegen von g über t nach h liegen die Winkel als Wechselwinkel (Z-Form) zueinander. Sie sind an Parallelen gleich groß: $55°$.

c) Nein. Bei parallelen Straßen müssten die Stufenwinkel gleich sein, hier ist aber

$55^\circ \neq 60^\circ$. Die Straßen g und h laufen also aufeinander zu.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Die Winkelsumme jedes Dreiecks beträgt 180°. Hier gilt aber $50^\circ + 60^\circ + 80^\circ = 190^\circ$. Die Messung kann so nicht stimmen, mindestens ein Winkel wurde falsch gemessen.

b) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich: $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

c) Spitze: $180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.

Antwort: a) Messfehler; b) 60°; c) 40°. Die Winkelsumme ist also auch ein gutes Werkzeug, um Messungen zu kontrollieren.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\gamma = 180^\circ - 52^\circ - 64^\circ = 64^\circ$. Die Winkelhalbierende teilt γ in zwei Winkel von je 32°.

b) Im Teildreieck ADC sind 52° bei A und 32° bei C bekannt: $\angle ADC = 180^\circ - 52^\circ - 32^\circ = 96^\circ$.

c) $\angle BDC$ ist Nebenwinkel zu $\angle ADC$: $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$. Kontrolle im Dreieck BCD: $64^\circ + 32^\circ + 84^\circ = 180^\circ$.

d) Die längste Seite liegt dem größten Winkel gegenüber. β und γ sind mit 64° gleich groß und am größten, also sind AC und AB gleich lang und länger als BC. Das Dreieck ist gleichschenklig.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\gamma = 180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ$.

b) Die Gerade g durch C ist parallel zu h, auf der AB liegt. Die Seite AC schneidet beide Parallelen. Der Winkel zwischen g und CA ist Wechselwinkel zu α, also 48°. Ebenso ist der Winkel zwischen g und CB Wechselwinkel zu β, also 67°.

c) An C liegen nebeneinander 48°, $\gamma = 65^\circ$ und 67°. Zusammen: 180°, ein gestreckter Winkel entlang g. Genau so beweist man allgemein, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Mit $(n-2) \cdot 180^\circ$: $n = 4$: 360°; $n = 5$: 540°; $n = 6$: 720°. Ein n-Eck lässt sich von einer Ecke aus in $n - 2$ Dreiecke zerlegen.

b) Im regelmäßigen Vieleck sind alle Winkel gleich. Fünfeck: $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Sechseck: $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

c) $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$. Drei Sechsecke füllen den Vollwinkel um einen Punkt genau aus.

d) Drei Fünfecke ergeben 324°, es bleibt eine Lücke von 36°. Vier Fünfecke ergeben 432° und würden sich überlappen. Mit regelmäßigen Fünfecken kann man daher keine Fläche lückenlos auslegen.

Lösung zu Aufgabe 18

Alle Stücke haben ihre Spitze im Mittelpunkt, die Spitzenwinkel ergeben zusammen den Vollwinkel $360°$.

a) Spitzenwinkel $360° : 8 = 45°$. Die beiden Schenkel sind Radien und gleich lang, also ist das Dreieck gleichschenklig. Basiswinkel: $(180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.

b) Gleichseitig heißt alle Winkel $60°$, auch der Spitzenwinkel. $360° : 60° = 6$ Stücke.

c) Spitzenwinkel $360° : 10 = 36°$, Basiswinkel $(180° - 36°) : 2 = 72°$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Winkelsumme: Winkel am See $= 180° - 74° - 52° = 54°$.

b) Der Außenwinkel bei H ist der Nebenwinkel des Innenwinkels: $180° - 52° = 128°$. Kontrolle mit dem Außenwinkelsatz: $74° + 54° = 128°$.

c) Im Dreieck liegt die längste Seite dem größten Winkel gegenüber. Der größte Winkel ist $74°$ am Turm, also ist die Seite HS (zwischen Hütte und See) am längsten.

d) Nein. Ein gleichschenkliges Dreieck hätte zwei gleich große Winkel. Hier sind alle drei Winkel verschieden.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Das Verhältnis $2 : 3 : 4$ bedeutet $2 + 3 + 4 = 9$ gleiche Teile. $180° : 9 = 20°$ pro Teil. Winkel: $2 \cdot 20° = 40°$, $3 \cdot 20° = 60°$, $4 \cdot 20° = 80°$.

b) Eine Diagonale zerlegt jedes Viereck in zwei Dreiecke. Die Winkel der beiden Dreiecke setzen sich genau zu den vier Winkeln des Vierecks zusammen. Jedes Dreieck hat die Winkelsumme $180°$, zusammen $2 \cdot 180° = 360°$.

c) $\alpha = 2\beta$ und $\alpha + \beta = 180°$. Einsetzen: $3\beta = 180°$, $\beta = 60°$, $\alpha = 120°$.