Lernzettel - Wahrscheinlichkeit und Laplace-Experimente

Klasse: Klasse 7

Wie wahrscheinlich ist eine Sechs, wie wahrscheinlich Regen? Hier lernst du Zufallsexperimente zu beschreiben, Wahrscheinlichkeiten nach Laplace zu berechnen und Baumdiagramme zu nutzen.

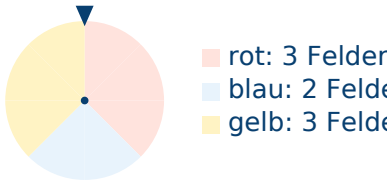
Einstieg: Wer fängt an?

Vor dem Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ würfeln alle: Wer zuerst eine Sechs hat, darf beginnen. Wie wahrscheinlich ist es, dass dir gleich beim ersten Wurf eine Sechs gelingt? Bei einem fairen Würfel hat jede der sechs Zahlen dieselbe Chance, also $\frac{1}{6} \approx 17\,\%$. Probiere es aus: Würfle 30-mal und zähle, wie oft die Sechs kommt. Zu erwarten sind etwa 5 Sechsen, aber auch 3 oder 8 sind ganz normal. Zufall bedeutet: Im Einzelfall ist alles möglich, auf lange Sicht zeigen sich Muster.

Zufallsexperimente

Definition: Zufallsexperiment und Ergebnismenge

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang mit mehreren möglichen Ausgängen, dessen Ergebnis man vorher nicht sicher kennt, zum Beispiel Würfeln, Münzwurf oder Glücksrad. Jeder mögliche Ausgang heißt **Ergebnis**. Die Menge aller Ergebnisse heißt **Ergebnismenge** Ω. Beim Würfeln gilt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, beim Münzwurf $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$.



Ereignisse

Definition: Ereignis

Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge von Ω. Beispiel: $E =$ „gerade Augenzahl“ $= \{2, 4, 6\}$. Das **Gegenereignis** besteht aus allen Ergebnissen, die nicht in E liegen: . Ein **sicheres Ereignis** tritt immer ein ($E = \Omega$), ein **unmögliches** nie ($E = \{\,\}$).

Absolute und relative Häufigkeit

Definition: Häufigkeiten

Tritt ein Ereignis bei n Versuchen k-mal ein, heißt k die **absolute Häufigkeit** und $\frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit**. Bei sehr vielen Versuchen stabilisiert sie sich in der Nähe der Wahrscheinlichkeit (empirisches Gesetz der großen Zahlen).

Beispiel 1: 200 Würfe

Ein Würfel wird 200-mal geworfen, die Sechs fällt 37-mal. Wie groß ist die relative Häufigkeit?

$\frac{37}{200} = 0{,}185 = 18{,}5\,\%$. Der theoretische Wert ist $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$.

Laplace-Experimente

Definition: Laplace-Experiment

Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind (fairer Würfel, faire Münze, gut gemischte Karten).

Regel: Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$



Beispiel 2: Würfel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „Augenzahl größer als 4“?

$E = \{5, 6\}$, also $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Beispiel 3: Urne

In einer Urne liegen 5 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Bestimme P(Blau) und P(nicht Rot).

$P(\text{Blau}) = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\,\%$. $P(\text{nicht Rot}) = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

Satz: Eigenschaften

$0 \leq P(E) \leq 1$, $P(\text{unmöglich}) = 0$, $P(\text{sicher}) = 1$. Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse addieren sich zu 1. Für das Gegenereignis gilt .

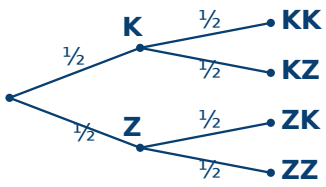
Hinweis

Wahrscheinlichkeiten gibt man als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozent an.

Zweistufige Zufallsexperimente

So gehst du vor: Ergebnisse zählen

1. Zeichne ein Baumdiagramm oder eine Tabelle.
2. Schreibe alle Ergebnisse auf, bevor du zählst.
3. Zähle die günstigen Ergebnisse und teile durch die Gesamtzahl.



Beispiel 4: Augensumme 7

Zwei Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 7?

Günstig: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, also 6 von $6 \cdot 6 = 36$. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Beispiel 5: Zwei Münzen

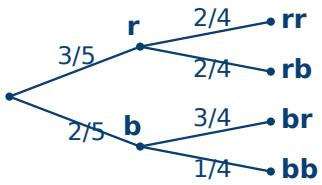
Zwei Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf?

Es gibt 4 Ergebnisse: KK, KZ, ZK, ZZ. Günstig sind KZ und ZK. $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Baumdiagramm und Pfadregeln

Regel: Pfadregeln

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste **multipliziert** (Produktregel). Gehören mehrere Pfade zu einem Ereignis, **addiert** man ihre Wahrscheinlichkeiten (Summenregel).



Beispiel 6: Ziehen mit Zurücklegen

Eine Urne enthält 2 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Bestimme P(beide rot), P(genau eine rot) und P(beide blau).

Beide rot: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$. Genau eine rot: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0{,}48$. Beide blau: $\frac{9}{25} = 0{,}36$. Kontrolle: $0{,}16 + 0{,}48 + 0{,}36 = 1$.

Wahrscheinlichkeit im Alltag

Hinweis

Eine Wahrscheinlichkeit sagt nichts über den nächsten einzelnen Versuch, sondern über den Anteil auf lange Sicht. Bei $30\,\%$ Regenwahrscheinlichkeit regnet es an etwa drei von zehn solcher Tage. Bei zwei Würfeln ist die Augensumme sieben die häufigste, weil sie auf sechs Arten entsteht.

Beispiel 6: Im Alltag (Glücksrad)

Ein Glücksrad hat 8 gleich große Felder, 3 davon sind rot. Wie wahrscheinlich ist es, bei zwei Drehungen beide Male Rot zu erhalten?

$P(\text{rot}) = \frac{3}{8}$. Für zwei Drehungen multipliziert man entlang des Pfades: $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \approx 14{,}1\,\%$.

Beispiel 7: Mindestens einmal

Wie wahrscheinlich ist es, bei drei Münzwürfen mindestens einmal Zahl zu bekommen?

Das Gegenereignis ist „dreimal Kopf“: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Also $P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87{,}5\,\%$.

Beispiel 8: Ohne Zurücklegen

Aus einer Schale mit 4 Äpfeln und 2 Birnen nimmt Jan nacheinander zwei Früchte. Wie wahrscheinlich sind zwei Äpfel?

Erster Zug: $\frac{4}{6}$. Zweiter Zug: Es sind nur noch 5 Früchte, davon 3 Äpfel: $\frac{3}{5}$. Zusammen $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

Typische Fehler

(1) Glauben, dass nach einer Pechsträhne das Glück „fällig“ ist: Würfel und Münzen haben kein Gedächtnis. (2) Bei Pfaden addieren statt multiplizieren, oder umgekehrt. (3) Bei „ohne Zurücklegen“ die Gesamtzahl nicht anpassen. (4) Wahrscheinlichkeiten über 1 oder unter 0 angeben. (5) Die Ergebnisse bei zwei Würfeln nicht unterscheiden: $(2, 5)$ und $(5, 2)$ sind zwei verschiedene Ergebnisse.

Wusstest du?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand im Jahr 1654 aus einem Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat über Glücksspiele. Ein Chevalier hatte gefragt, warum er bei einem Würfelspiel nicht gewinnt. Heute braucht man sie in Wettervorhersagen, bei Impfstudien und in der Qualitätskontrolle.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ergebnismenge Ω: alle möglichen Ausgänge; Ereignis: Teilmenge von Ω.
- Laplace: $P(E) = \frac{\text{günstige}}{\text{alle}}$, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.
- $0 \leq P \leq 1$; sicheres Ereignis 1, unmögliches 0.
- Gegenereignis: .
- Relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ nähert sich bei vielen Versuchen der Wahrscheinlichkeit.
- Baumdiagramm oder Tabelle für zweistufige Experimente.

Achtung

Zufallsexperimente haben kein Gedächtnis: Nach mehrmals Rot ist Schwarz nicht „dran“. Prüfe, ob die Ergebnisse wirklich gleich wahrscheinlich sind. Bei „Augensumme“ sind die Summen nicht gleich wahrscheinlich, die Würfelpaare schon. Eine Wahrscheinlichkeit ist nie größer als 1. Bei zweistufigen Experimenten sind KZ und ZK verschiedene Ergebnisse.

Vertiefung: Mit Wahrscheinlichkeiten sicher umgehen

Einstieg: Zufall oder Gesetz?

Ob die nächste Münze Kopf oder Zahl zeigt, kann niemand vorhersagen. Trotzdem kann man über viele Würfe erstaunlich genaue Aussagen machen: Wirft man eine

Münze 1000-mal, wird ziemlich sicher ungefähr 500-mal Kopf fallen. Der einzelne Versuch ist zufällig, die Gesamtheit vieler Versuche folgt aber einer Regel. Dieses Phänomen nennt man das **empirische Gesetz der großen Zahlen**. Die Wahrscheinlichkeit ist also ein Maß dafür, welchen Anteil ein Ereignis bei sehr vielen Wiederholungen ungefähr erreicht. Versicherungen, Wettervorhersagen und Medizin nutzen genau diese Idee.

Merke: Wahrscheinlichkeiten schreiben und deuten

Eine Wahrscheinlichkeit ist immer eine Zahl zwischen 0 und 1. Man kann sie als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozent angeben: $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit 0 bedeutet ein unmögliches Ereignis, die Wahrscheinlichkeit 1 ein sicheres. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist immer genau 1. Mit dieser Tatsache kannst du deine Rechnungen kontrollieren oder eine fehlende Wahrscheinlichkeit bestimmen.

So gehst du vor: Mit dem Gegenereignis rechnen

1. Prüfe, ob in der Frage Wörter wie „mindestens einmal“ oder „nicht“ vorkommen. Dann ist das Gegenereignis oft einfacher.
2. Formuliere das Gegenereignis: Das Gegenteil von „mindestens einmal Sechs“ ist „keine einzige Sechs“.
3. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, zum Beispiel mit der Pfadregel.
4. Ziehe das Ergebnis von 1 ab: .

Beispiel 9: Mindestens eine Sechs

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei drei Würfen mindestens eine Sechs zu würfeln?

Direkt müsste man viele Fälle zählen: genau eine, genau zwei oder drei Sechsen. Viel einfacher ist das Gegenereignis „keine Sechs“. Bei jedem Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für „keine Sechs“ gleich $\frac{5}{6}$. Nach der Pfadregel ergibt sich $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0{,}579$. Also ist $P(\text{mindestens eine Sechs}) = 1 - 0{,}579 = 0{,}421$, das sind etwa $42\,\%$.

Achtung: Kein Laplace-Experiment

Die Laplace-Regel „günstige durch mögliche Ergebnisse“ gilt nur, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Beim Werfen zweier Würfel ist die Augensumme 7 viel wahrscheinlicher als die 2, obwohl beide nur eine von 11 möglichen Summen sind. Richtig zählt man die 36 gleich wahrscheinlichen Paare. Auch ein Reißnagel, der auf die Spitze oder den Kopf fallen kann, ist kein Laplace-Experiment. Hier hilft nur das Schätzen über relative Häufigkeiten.

Schon gewusst?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand im 17. Jahrhundert aus Glücksspielfragen. Ein französischer Spieler fragte die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat, wie man den Einsatz gerecht verteilt, wenn ein Spiel vorzeitig abgebrochen wird. Ihr Briefwechsel gilt als Geburtsstunde dieses Gebiets. Pierre-Simon Laplace, nach dem die Laplace-Experimente benannt sind, fasste das Wissen um 1812 in einem großen Werk zusammen und nannte die Wahrscheinlichkeitsrechnung „gesunden Menschenverstand, in Zahlen ausgedrückt“.

Beispiel: Wahrscheinlichkeit schätzen

Ein Reißnagel wird 500-mal geworfen und landet 310-mal auf dem Rücken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „Rücken“ ungefähr?

Ein Reißnagel ist kein Laplace-Experiment, denn die beiden Lagen sind nicht gleich wahrscheinlich. Man kann die Wahrscheinlichkeit also nicht durch Abzählen bestimmen. Stattdessen nutzt man die relative Häufigkeit aus vielen Versuchen als Schätzwert: $\frac{310}{500} = 0{,}62$. Die Wahrscheinlichkeit für „Rücken“ beträgt also etwa $62\,\%$. Je mehr Würfe man auswertet, desto zuverlässiger wird dieser Schätzwert.

So gehst du vor: Eine Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen

1. Prüfe, ob alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, zum Beispiel bei einem fairen Würfel oder gleich großen Feldern.
2. Schreibe die Ergebnismenge auf und zähle alle möglichen Ergebnisse.
3. Schreibe das Ereignis als Menge auf und zähle die günstigen Ergebnisse.
4. Teile die Anzahl der günstigen durch die Anzahl der möglichen Ergebnisse und kürze den Bruch.
5. Gib das Ergebnis bei Bedarf zusätzlich als Dezimalzahl oder in Prozent an.

Ottos Tipp

Schreibe zuerst alle Ergebnisse auf, bevor du zählst. Eine Tabelle oder ein Baumdiagramm verhindert, dass du Fälle vergisst. Nutze das Gegenereignis, wenn es einfacher zu zählen ist: „mindestens einmal“ heißt „nicht keinmal“.