Lösungen - Wahrscheinlichkeit und Laplace-Experimente

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

Die Ergebnismenge Ω enthält alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments, jedes genau einmal.

a) Ein Würfel zeigt eine der Zahlen 1 bis 6: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) $\Omega = \{K, Z\}$.

c) Bei zwei Würfen schreibt man die Ergebnisse als Paare in der richtigen Reihenfolge: $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$. KZ und ZK sind verschiedene Ergebnisse.

d) $\Omega = \{\text{Rot}, \text{Blau}, \text{Grün}, \text{Gelb}\}$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gerade Augenzahlen: $E = \{2, 4, 6\}$. Primzahlen bis 6: $F = \{2, 3, 5\}$. Die 1 ist keine Primzahl.

b) Das Gegenereignis enthält alle Ergebnisse, die nicht zu E gehören: , also „ungerade Zahl“.

c) „E und F“ bedeutet, dass beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind. Nur die 2 ist gerade und eine Primzahl: $\{2\}$.

d) Unmöglich ist zum Beispiel „Augenzahl 7“, Wahrscheinlichkeit 0. Sicher ist zum Beispiel „Augenzahl kleiner als 7“, Wahrscheinlichkeit 1.

Lösung zu Aufgabe 3

Beim fairen Würfel sind alle 6 Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Laplace-Regel: $P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{6}$.

a) Nur die 5: $\frac{1}{6}$.

b) Größer als 4: $\{5, 6\}$, also $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c) Ungerade: $\{1, 3, 5\}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

d) Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6: $\frac{5}{6}$. Nur die 5 teilt 12 nicht.

e) Gegenereignis von „6“: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Insgesamt liegen $5 + 3 + 2 = 10$ Kugeln in der Urne. Jede wird mit gleicher

Wahrscheinlichkeit gezogen.

a) $P(\text{blau}) = \frac{3}{10} = 30\,\%$.

b) „Nicht rot“ sind die blauen und grünen Kugeln: $\frac{3+2}{10} = \frac{1}{2}$. Oder mit dem Gegenereignis: $1 - \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

c) $\frac{5+2}{10} = \frac{7}{10} = 70\,\%$.

d) Es gibt keine gelbe Kugel. Das Ereignis ist unmöglich, die Wahrscheinlichkeit ist 0.

Lösung zu Aufgabe 5

Relative Häufigkeit = absolute Häufigkeit durch Anzahl der Versuche.

a) $\frac{46}{100} = 0{,}46 = 46\,\%$.

b) $\frac{25}{120} \approx 0{,}208 = 20{,}8\,\%$.

c) Theoretisch erwartet man bei der Münze $50\,\%$ und bei der Sechs $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$. Die gemessenen Werte weichen davon ab, weil der Zufall bei wenigen Versuchen stark schwankt. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähern sich die relativen Häufigkeiten bei sehr vielen Versuchen den Wahrscheinlichkeiten an. Die Abweichungen sind also kein Beweis für einen gezinkten Würfel.

Lösung zu Aufgabe 6

Ein Ereignis und sein Gegenereignis ergänzen sich immer zu 1, denn genau eines von beiden tritt ein.

a) .

b) „Kein Regen“ ist das Gegenereignis zu „Regen“: $100\,\% - 30\,\% = 70\,\%$.

c) Die drei Farben decken alle Möglichkeiten ab, ihre Wahrscheinlichkeiten ergeben zusammen 1: $P(\text{Gelb}) = 1 - 0{,}4 - 0{,}35 = 0{,}25$.

Antwort: $0{,}65$; $70\,\%$; $0{,}25$. Zur Kontrolle: $0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}25 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Alle 10 Felder sind gleich groß, also Laplace-Experiment: Gold $\frac{1}{10} = 0{,}1$, Silber $\frac{2}{10} = 0{,}2$, Bronze $0{,}3$, Niete $0{,}4$. Summe: 1.

b) Gewinnfelder: $1 + 2 + 3 = 6$, also $\frac{6}{10} = 60\,\%$. Oder: $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

c) Erwartete Anzahl = Anzahl der Versuche mal Wahrscheinlichkeit: $200 \cdot 0{,}1 = 20$-mal. Das ist ein ungefährer Wert, tatsächlich können es auch 17 oder 23 sein.

d) Gegenereignis zu Silber: $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Lösung zu Aufgabe 8

Alle 32 Karten sind gleich wahrscheinlich, man zählt die günstigen Karten.

a) Herz hat 8 Karten: $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

b) Es gibt in jeder Farbe ein Ass, also 4 Asse: $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

c) Das Herz-Ass gibt es nur einmal: $\frac{1}{32}$.

d) 4 Buben und 4 Damen: $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

e) Herz und Karo zusammen: 16 Karten, $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Antwort: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 9

Das Baumdiagramm hat zwei Stufen mit je zwei Ästen (K und Z), an jedem Ast steht $\frac{1}{2}$.

a) Es gibt vier Pfade: KK, KZ, ZK, ZZ. Nach der Produktregel hat jeder Pfad die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b) $P(KK) = \frac{1}{4}$.

c) Genau einmal Kopf: Pfade KZ und ZK. Summenregel: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

d) Das Gegenereignis von „mindestens einmal Zahl“ ist „keinmal Zahl“, also KK. Damit gilt $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 10

Bei zwei Würfeln gibt es $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Paare. Man zählt die günstigen Paare.

a) Summe 7: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, also $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Summe 10: 3 Paare, Summe 11: 2 Paare, Summe 12: 1 Paar. Zusammen 6, also $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c) Pasch: $(1,1)$ bis $(6,6)$, 6 Paare, $\frac{1}{6}$.

d) Nur $(1,1)$: $\frac{1}{36}$.

Die Summe 7 ist die wahrscheinlichste Augensumme, die 2 und die 12 sind am seltensten.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Gewinne: $1 + 9 + 40 = 50$. Nieten: $200 - 50 = 150$.

b) $\frac{1}{200} = 0{,}005 = 0{,}5\,\%$. Der Hauptgewinn ist also sehr unwahrscheinlich.

c) $\frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 25\,\%$. Jedes vierte Los gewinnt im Durchschnitt.

d) Erwartungswert: $4 \cdot 0{,}25 = 1$ Gewinn. Lena kann also ungefähr einen Gewinn erwarten. Sicher ist das nicht: Sie kann auch leer ausgehen oder mehrere Gewinne

haben.

Lösung zu Aufgabe 12

Im Baumdiagramm stehen an jeder Stufe die Äste „Treffer“ ($0{,}7$) und „Fehlschuss“ ($0{,}3$).

a) $P(\text{Fehlschuss}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

b) Pfad Treffer–Treffer: $0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$.

c) Genau einmal: Pfade TF und FT, je $0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$. Summe: $0{,}42$.

d) Gegenereignis „kein Treffer“: $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$. Also $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Kontrolle: $0{,}49 + 0{,}42 + 0{,}09 = 1$. Mia trifft mit 91 % mindestens einmal.

Lösung zu Aufgabe 13

Baumdiagramm: Samstag Regen $0{,}4$ / trocken $0{,}6$; Sonntag Regen $0{,}5$ / trocken $0{,}5$.

a) $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 = 20\,\%$.

b) $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 = 30\,\%$.

c) Mindestens ein Regentag ist das Gegenereignis zu „kein Regentag“:
$1 - 0{,}3 = 0{,}7 = 70\,\%$.

d) Regen–trocken: $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$; trocken–Regen: $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$. Summe $0{,}5 = 50\,\%$.

Kontrolle: $20\,\% + 30\,\% + 50\,\% = 100\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 14

In der Tüte sind 20 Bärchen. Ohne Zurücklegen ändern sich beim zweiten Zug Anzahl und Gesamtzahl.

a) $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

b) Nach einem roten sind noch 7 rote von 19 übrig: $\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{56}{380} = \frac{14}{95} \approx 0{,}147$.

c) $\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38} \approx 0{,}079$.

d) Nach einem roten sind 12 nicht rote von 19 übrig: $\frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{96}{380} = \frac{24}{95} \approx 0{,}253$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $6 \cdot 6 = 36$ Ergebnisse. Die Summe der Tabellenzeile ist ebenfalls $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

b) Gerade Summen (2, 4, 6, 8, 10, 12): $1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$ Möglichkeiten, $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Für ungerade bleiben ebenfalls 18. Beide haben gleiche Chancen, das Spiel ist fair.

c) Anna: $5 + 6 + 5 = 16$ Möglichkeiten, $\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\,\%$. Ben: $36 - 16 = 20$,

$\frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\,\%$.

d) Ben hat Vorteil. Gäbe man Anna die Summe 9 dazu, hätte sie 20 und Ben 16. Fair ist eine Regel mit je 18 Möglichkeiten, etwa gerade gegen ungerade Summe.

Lösung zu Aufgabe 16

a) 20 gleich große Felder: Hauptpreis $\frac{1}{20} = 5\,\%$, Sachpreis $\frac{4}{20} = 20\,\%$, Trostpreis $\frac{5}{20} = 25\,\%$, Niete $\frac{10}{20} = 50\,\%$.

b) Erwartete Anzahl = 300 mal Wahrscheinlichkeit: Hauptpreis 15-mal, Sachpreis 60-mal, Trostpreis 75-mal, Niete 150-mal.

c) Auszahlung: $15\cdot10+60\cdot2+75\cdot0{,}20=150+120+15=285\,€$. Einnahmen: $300\cdot1=300\,€$.

d) Zu erwarten ist ein Gewinn von $300-285=15\,€$. Der Gewinn ist klein, und durch Zufall kann es auch einmal Verlust geben. Langfristig lohnt sich das Rad aber knapp.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{30}{1000} = 0{,}03 = 3\,\%$.

b) Man nimmt an, dass der Anteil gleich bleibt: $2400 \cdot 0{,}03 = 72$ defekte Birnen.

c) Ohne Zurücklegen: erste Birne defekt $\frac{30}{1000}$, danach sind noch 29 defekte von 999 übrig. $\frac{30}{1000} \cdot \frac{29}{999} \approx 0{,}00087 \approx 0{,}0009$.

d) $\frac{970}{1000} \cdot \frac{969}{999} \approx 0{,}941$.

Antwort: Zwei defekte Birnen hintereinander sind sehr selten (unter 0,1 %), zwei intakte kommen in etwa 94 % der Fälle vor.

Lösung zu Aufgabe 18

Im Beutel sind 5 Murmeln, 3 rot und 2 blau.

a) Mit Zurücklegen bleiben die Wahrscheinlichkeiten gleich: rot–rot $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; blau–blau $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$; verschiedene Farben $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

b) Ohne Zurücklegen: rot–rot $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; blau–blau $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$; verschieden $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$.

c) $\frac{9+4+12}{25} = 1$ und $\frac{3+1+6}{10} = 1$.

d) Gleiche Farben ohne Zurücklegen: $40\,\%$ statt $52\,\%$. Die erste gezogene Farbe fehlt beim zweiten Zug, deshalb wird dieselbe Farbe seltener.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Wahrscheinlichkeit ist der Anteil der Zeit im Zyklus: Grün $\frac{40}{80} = 0{,}5$, Gelb $\frac{4}{80} = 0{,}05$, Rot $\frac{36}{80} = 0{,}45$. Summe 1.

b) Zwei unabhängige Ampeln, Produktregel: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

c) „Nicht Rot“ heißt Grün oder Gelb: $0{,}55$. An beiden Ampeln: $0{,}55 \cdot 0{,}55 = 0{,}3025$.

d) Gegenereignis zu c): $1 - 0{,}3025 = 0{,}6975$, also etwa $70\,\%$.

Antwort: In rund 70 % der Fälle muss man mindestens einmal an einer roten Ampel warten.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Die erste Person darf jeden Tag haben ($\frac{7}{7}$), die zweite einen der 6 anderen ($\frac{6}{7}$), die dritte einen der restlichen 5 ($\frac{5}{7}$). Produkt: $\frac{210}{343} = \frac{30}{49} \approx 0{,}612$, also etwa 61 %.

b) Gegenereignis „keine Sechs in sechs Würfen“: $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$. Also $1 - 0{,}335 = 0{,}665$.
Mia irrt sich: Mit rund einem Drittel Wahrscheinlichkeit kommt keine Sechs.

c) Weiterhin $\frac{1}{2}$. Die Münze hat kein Gedächtnis, jeder Wurf ist unabhängig von den vorherigen. Der Glaube, dass nun „Zahl fällig“ sei, ist ein bekannter Denkfehler.