Lernzettel - Ungleichungen

Klasse: Klasse 7

Ungleichungen beschreiben Grenzen: höchstens, mindestens, mehr als. Hier lernst du, sie zu lösen und die Lösungsmenge darzustellen.

Einstieg: Die Achterbahn

Vor der Achterbahn steht ein Schild: „Zugang nur ab $1{,}40\,\mathrm{m}$ Körpergröße.“ Lukas ist $1{,}43\,\mathrm{m}$ groß, Mia $1{,}38\,\mathrm{m}$. Wer darf fahren? Die Regel gibt keine einzelne Zahl vor, sondern einen ganzen Bereich: alle Größen x mit $x \geq 1{,}40$. So etwas beschreibt eine Ungleichung. Im Alltag begegnen sie dir ständig: Höchstgeschwindigkeit, Mindestalter, Budget.

Was ist eine Ungleichung?

Definition: Ungleichung

Eine **Ungleichung** vergleicht zwei Terme mit einem der Zeichen (kleiner), $>$ (größer), $\leq$ (kleiner oder gleich) oder $\geq$ (größer oder gleich). Beispiel: $2x + 1$. Anders als eine Gleichung hat sie meist *unendlich viele* Lösungen. Hier sind alle x Lösungen, denn $2 \cdot 3{,}9 + 1 = 8{,}8$, aber $2 \cdot 4 + 1 = 9$ ist nicht kleiner als 9.

Lösungsmenge und Zahlengerade

Definition: Lösungsmenge

Man schreibt die Lösungsmenge in Mengenschreibweise $\mathbb{L} = \{x \mid x$ oder als Intervall $(-\infty; 4)$. Die Mengenschreibweise liest man: „Menge aller x, für die gilt: x ist kleiner als 4“. Runde Klammern bedeuten, dass der Rand nicht dazugehört, eckige schließen ihn ein.

So gehst du vor: Auf der Zahlengeraden darstellen

1. Zeichne einen Pfeil in Richtung der Lösungen.
2. Setze bei und $>$ am Startpunkt einen **offenen Kreis** (die Zahl gehört nicht dazu).
3. Setze bei $\leq$ und $\geq$ einen **ausgefüllten Punkt** (die Zahl gehört dazu).

Beispiel 1: Zeichnen

Stelle $x \geq -2$ dar.

Man zeichnet einen ausgefüllten Punkt bei -2 und einen Pfeil nach rechts. Sucht man

nur ganze Zahlen, gilt $\mathbb{L} = \{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$.

Hinweis

Achte auf die Grundmenge: Sind natürliche, ganze oder rationale Zahlen gemeint? Je nachdem ändert sich die Lösungsmenge.

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Regel: Umformungen

Auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren: Das Zeichen bleibt. Beide Seiten mit einer **positiven** Zahl multiplizieren oder durch sie teilen: Das Zeichen bleibt. Beide Seiten mit einer **negativen** Zahl multiplizieren oder durch sie teilen: Das Zeichen **dreht sich um**.

Merke: Warum dreht sich das Zeichen?

Es gilt 2. Multipliziert man mit -1, erhält man -2 und -5, und nun ist $-2 > -5$. Die Reihenfolge auf der Zahlengeraden kehrt sich um.

Lösungsverfahren

So gehst du vor: Ungleichung lösen

1. Fasse zusammen und löse Klammern auf.
2. Bringe alle Terme mit x auf eine Seite, alle Zahlen auf die andere.
3. Teile durch den Faktor vor x und drehe das Zeichen um, wenn er negativ ist.
4. Teste mit einer Zahl aus der Lösungsmenge und einer außerhalb.

Beispiel 2: Einfach

Löse $3x - 5$.

$3x$, also x. $\mathbb{L} = \{x \mid x$.

Beispiel 3: Durch negative Zahl teilen

Löse $-2x + 3 \geq 11$.

$-2x \geq 8 \quad |: (-2)$. Das Zeichen dreht sich um: $x \leq -4$. Probe mit $x = -5$:
$10 + 3 = 13 \geq 11$. Wahr.

Beispiel 4: x auf beiden Seiten

Löse $5x + 2 > 2x + 14$.

$3x + 2 > 14 \mid -2$, $3x > 12 \mid : 3$, also $x > 4$.

Beispiel 5: Mit Klammern

Löse $2(x - 3) \leq 4x + 2$.

$2x - 6 \leq 4x + 2 \mid -4x$: $-2x - 6 \leq 2 \mid +6$: $-2x \leq 8 \mid : (-2)$: $x \geq -4$.

Beispiel 6: In den natürlichen Zahlen

Löse $3x - 2$ für $x \in \mathbb{N}$.

$3x$, also x. In den natürlichen Zahlen (mit 0) gilt $\mathbb{L} = \{0, 1, 2\}$.

Doppelungleichungen und Textaufgaben

Regel: Doppelungleichung

Eine **Doppelungleichung** wie -3 wird in allen drei Teilen gleichzeitig umgeformt: $\mid -1$: -4; $\mid : 2$: -2.

Regel: Signalwörter

„Mindestens“ heißt $\geq$, „höchstens“ heißt $\leq$, „mehr als“ heißt $>$, „weniger als“ heißt .

Beispiel 7: Klassenfahrt

Eine Klasse hat 120 € für die Fahrt. Die Busmiete kostet 45 €, jedes Kind zahlt 6 € Eintritt. Wie viele Kinder dürfen höchstens mitfahren?

$45 + 6x \leq 120$, $6x \leq 75$, $x \leq 12{,}5$. Da x eine ganze Zahl ist, dürfen höchstens 12 Kinder mitfahren.

Beispiel 8: Tarifvergleich

Tarif A kostet 8 € plus 0,05 € je Minute, Tarif B kostet 0,13 € je Minute. Wann ist A günstiger?

$8 + 0{,}05x$, 8, $x > 100$. Ab mehr als 100 Minuten ist Tarif A günstiger.

Beispiel 8: Im Alltag (Taschengeld)

Emma möchte ein Buch für *14{,}90\,€* kaufen. Sie hat *5\,€* und bekommt jede Woche *2{,}50\,€* Taschengeld, das sie spart. Nach wie vielen Wochen kann sie das Buch kaufen?

$5 + 2{,}5w \geq 14{,}9$, also $2{,}5w \geq 9{,}9$, $w \geq 3{,}96$. Nach 4 Wochen reicht das Geld. Beachte:

Hier sind nur ganze Wochen sinnvoll, die Lösungsmenge wird durch die Situation begrenzt.

Beispiel 9: Negative Zahl beim Teilen

Löse $-4x + 3$.

$-4x$. Weil durch eine negative Zahl geteilt wird, dreht sich das Zeichen: $x > -3$. Probe mit $x = 0$: 3 wahr. Probe mit $x = -5$: 23 falsch, passt nicht in die Lösungsmenge.

Beispiel 10: Doppelungleichung lösen

Löse 3.

Auf alle drei Teile $+1$: 4. Alle Teile $:2$: 2. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{x \mid 2$.

Typische Fehler

(1) Bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Relationszeichen nicht umdrehen. (2) und $\leq$ verwechseln: Bei $\leq$ gehört die Grenze zur Lösungsmenge. (3) Die Lösungsmenge als einzelne Zahl angeben, obwohl es unendlich viele Lösungen gibt. (4) Textaufgaben ohne Blick auf die Sachsituation lösen, etwa $3{,}96$ Wochen.

Wusstest du?

Die Zeichen und $>$ führte der englische Mathematiker Thomas Harriot ein; sie erschienen erst nach seinem Tod im Jahr 1631 im Druck. Ungleichungen sind in der Wirtschaft unverzichtbar: Ein Betrieb muss mit Material, Zeit und Geld auskommen, und dafür gibt es immer Höchst- oder Mindestgrenzen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ungleichungen vergleichen Terme mit , $>$, $\leq$, $\geq$ und haben meist unendlich viele Lösungen.
- Offener Kreis bei und $>$, gefüllter Punkt bei $\leq$ und $\geq$.
- Addieren und Subtrahieren ändern das Zeichen nicht.
- Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl dreht das Zeichen um.
- Doppelungleichungen werden in allen Teilen gleichzeitig umgeformt.
- Mindestens heißt $\geq$, höchstens heißt $\leq$.

Achtung

Beim Teilen oder Multiplizieren mit einer negativen Zahl muss das Zeichen umgedreht werden. Verwechsle offenen und gefüllten Kreis nicht. In Sachaufgaben müssen Dezimallösungen passend gerundet werden: Personen und Stücke sind ganze Zahlen. Schreibe in der Lösung keine Ungleichung mit $=$.

Vertiefung: Ungleichungen verstehen und anwenden

Einstieg: Gleichung oder Ungleichung?

Bei einer Gleichung sucht man meist genau eine Zahl. Im Alltag lauten die Fragen aber oft anders: „Wie viele Kisten darf ich höchstens in den Aufzug laden?“ oder „Ab wie vielen Minuten lohnt sich die Flatrate?“. Die Antwort ist dann keine einzelne Zahl, sondern ein ganzer Bereich von Zahlen. Genau solche Bereiche beschreiben Ungleichungen. Das Lösen funktioniert fast wie bei Gleichungen. Es gibt nur eine wichtige Besonderheit, die du dir unbedingt merken musst: Beim Multiplizieren oder Dividieren mit einer negativen Zahl dreht sich das Relationszeichen um.

Definition: Relationszeichen

Zum Vergleichen gibt es vier Zeichen. a heißt „a ist kleiner als b“, $a > b$ heißt „a ist größer als b“. Das Zeichen $\leq$ bedeutet „kleiner oder gleich“ und $\geq$ bedeutet „größer oder gleich“. Bei $\leq$ und $\geq$ gehört die Grenze selbst zur Lösungsmenge, auf der Zahlengeraden zeichnet man dort einen ausgefüllten Punkt. Bei und $>$ gehört die Grenze nicht dazu, man zeichnet einen leeren Kreis.

Merke: Die Grundmenge entscheidet

Die Lösungsmenge hängt davon ab, welche Zahlen überhaupt zugelassen sind. Die Ungleichung x hat in den natürlichen Zahlen nur die Lösungen 0, 1 und 2. In den rationalen Zahlen gehören dagegen unendlich viele Zahlen dazu, etwa auch -5 oder $2{,}99$. Bei Sachaufgaben musst du deshalb überlegen, ob nur ganze Zahlen sinnvoll sind (Personen, Kisten, Eintrittskarten) und das Ergebnis gegebenenfalls passend runden.

So gehst du vor: Richtig runden bei Sachaufgaben

1. Löse die Ungleichung ganz normal und erhalte zum Beispiel $x \leq 10{,}56$.
2. Überlege, ob nur ganze Zahlen erlaubt sind.
3. Bei „höchstens“ ($\leq$) rundest du immer ab: Es dürfen höchstens 10 Kisten sein, denn 11 wäre zu viel.
4. Bei „mindestens“ ($\geq$) rundest du immer auf: Aus $w \geq 9{,}3$ Wochen werden 10 Wochen, denn nach 9 Wochen reicht es noch nicht.
5. Schreibe einen Antwortsatz und prüfe den Grenzwert durch Einsetzen.

Beispiel 11: Mit Brüchen

Löse $\frac{x}{3} - 1 \geq \frac{x}{2}$.

Multipliziere beide Seiten mit dem Hauptnenner 6. Da 6 positiv ist, bleibt das Zeichen erhalten: $2x - 6 \geq 3x$. Subtrahiere $2x$: $-6 \geq x$. Das bedeutet $x \leq -6$. Probe mit $x = -6$: links $-2 - 1 = -3$, rechts -3. Die Grenze gehört dazu. Probe mit $x = -12$:

links -5, rechts -6, und $-5 \geq -6$ stimmt.

Achtung: Seiten vertauschen

Wenn du am Ende die Seiten tauschst, musst du auch das Zeichen spiegeln. Aus $5 > x$ wird x, nicht $x > 5$. Die Spitze des Zeichens zeigt immer auf die kleinere Seite. Lies dir die Ungleichung zur Kontrolle laut vor: „Fünf ist größer als x“ bedeutet dasselbe wie „ x ist kleiner als fünf“.

Schon gewusst?

Die Zeichen und $>$ wurden 1631 von dem englischen Mathematiker Thomas Harriot eingeführt, in einem Buch, das erst nach seinem Tod erschien. Die Zeichen $\leq$ und $\geq$ kamen etwa hundert Jahre später hinzu. Heute stecken Ungleichungen überall: Ein Navigationsgerät sucht Wege mit möglichst wenig Fahrzeit, ein Online-Shop prüft, ob der Bestellwert für den kostenlosen Versand reicht, und Ingenieure berechnen, wie viel Last eine Brücke höchstens tragen darf.

Beispiel 12: Lösung prüfen mit Testzahlen

Prüfe die Lösung $x > 2$ der Ungleichung $4 - 5x$.

Wähle eine Zahl aus der Lösungsmenge, zum Beispiel $x = 3$: $4 - 15 = -11$, und -11 ist wahr. Wähle dann eine Zahl außerhalb, zum Beispiel $x = 0$: $4 - 0 = 4$, und 4 ist falsch. Prüfe zuletzt die Grenze $x = 2$: $4 - 10 = -6$, und -6 ist falsch, also gehört die 2 nicht dazu. Alle drei Tests passen zur Lösung $x > 2$. Mit diesen drei Testzahlen entdeckst du fast jeden Vorzeichenfehler.

Hinweis: Ungleichungen im Alltag erkennen

Formulierungen wie „höchstens“, „mindestens“, „nicht mehr als“ oder „weniger als“ zeigen fast immer eine Ungleichung an. Markiere solche Wörter im Text, bevor du die Rechnung aufstellst.

Ottos Tipp

Teste jede Lösung mit einer Zahl aus der Lösungsmenge und einer außerhalb. Bei x probierst du 0 und 7 aus. Die erste muss die Ungleichung erfüllen, die zweite nicht. Diese Stichprobe entlarvt vergessene Zeichenumkehrungen sofort.