Lösungen - Ungleichungen

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

Man setzt jede Zahl ein und prüft, ob eine wahre Aussage entsteht.

a) -2 und 0 sind wahr. 3 ist falsch, denn 3 ist nicht kleiner als sich selbst. 5 ist falsch. Lösungen: -2 und 0.

b) $x \geq 0$ gilt für 0, 3 und 5. Die Null gehört dazu, weil „gleich“ erlaubt ist.

c) Umformen: $2x - 1 > 4$, $2x > 5$, $x > 2{,}5$. Das erfüllen 3 und 5. Kontrolle: $2 \cdot 3 - 1 = 5 > 4$.

Lösung zu Aufgabe 2

Bei und $>$ gehört die Grenze nicht dazu (leerer Kreis), bei $\leq$ und $\geq$ schon (ausgefüllter Punkt).

a) $\mathbb{L} = \{x \mid x > 2\}$: leerer Kreis bei 2, Pfeil nach rechts, denn alle größeren Zahlen sind Lösungen.

b) $\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -1\}$: ausgefüllter Punkt bei -1, Pfeil nach links.

c) $\mathbb{L} = \{x \mid -2$: leerer Kreis bei -2, ausgefüllter Punkt bei 3, dazwischen eine durchgezogene Strecke, da beide Bedingungen gleichzeitig gelten.

Lösung zu Aufgabe 3

Man formt wie bei Gleichungen um. Da hier nur mit positiven Zahlen multipliziert oder geteilt wird, bleibt das Zeichen erhalten.

a) $x + 4$: x, $\mathbb{L} = \{x \mid x$.

b) $x - 3 \geq 5 \mid +3$: $x \geq 8$.

c) $3x \leq 12 \mid :3$: $x \leq 4$.

d) $\frac{x}{2} > -3 \mid \cdot 2$: $x > -6$. Probe mit $x = 0$: $0 > -3$ ist wahr.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $4x - 7 > 9 \mid +7$: $4x > 16 \mid :4$: $x > 4$.

b) $5x + 2 \leq 27 \mid -2$: $5x \leq 25 \mid :5$: $x \leq 5$.

c) $2x + 9$: $2x$: x.

d) $6 - x \geq 1 \mid -6$: $-x \geq -5$. Nun wird mit -1 multipliziert, deshalb dreht sich das Relationszeichen: $x \leq 5$. Probe mit $x = 0$: $6 \geq 1$ ist wahr; mit $x = 6$: $0 \geq 1$ ist falsch.

Antwort: $x > 4$; $x \leq 5$; x; $x \leq 5$.

Lösung zu Aufgabe 5

Bei jeder Division durch eine negative Zahl wird das Zeichen umgedreht.

a) $-3x + 2 \leq 14 \mid -2$: $-3x \leq 12 \mid :(-3)$: $x \geq -4$.

b) $-2x > 10 \mid :(-2)$: x.

c) $4 - 5x$: $-5x$: $x > 2$.

d) $-\frac{x}{2} \geq 3 \mid \cdot(-2)$: $x \leq -6$.

Probe bei c) mit $x = 3$: $4 - 15 = -11$ ist wahr. Antwort: $x \geq -4$; x; $x > 2$; $x \leq -6$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $2x + 2$: 3, also $x > 3$.

b) $5x - 3 \geq 2x + 9 \mid -2x + 3$: $3x \geq 12$, $x \geq 4$.

c) $3x - 6 \leq x + 4 \mid -x + 6$: $2x \leq 10$, $x \leq 5$.

d) $7 - 2x > x - 8 \mid +2x + 8$: $15 > 3x$, also $5 > x$ und damit x.

Tipp: Bringe die x-Glieder auf die Seite, auf der der Koeffizient positiv bleibt. Dann musst du nicht durch eine negative Zahl teilen. Antwort: $x > 3$; $x \geq 4$; $x \leq 5$; x.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Kosten für x Karten dürfen das Geld nicht übersteigen: $8{,}5x \leq 25$, $x \leq 2{,}94$. Da es nur ganze Karten gibt, rundet man ab: höchstens 2 Karten.

b) Eine Karte mit Popcorn kostet *12{,}70\,€*: $12{,}7x \leq 25$, $x \leq 1{,}97$. Höchstens 1 Karte mit Popcorn.

c) Mit Gutschein kostet die Karte *0{,}8\cdot8{,}50=6{,}80\,€*: $6{,}8x \leq 25$, $x \leq 3{,}68$. Höchstens 3 Karten.

d) *4\cdot8{,}50=34{,}00\,€*. Man braucht mindestens 34 €, Jan fehlen also 9 €.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Gewicht der Frau plus Gewicht der Kisten darf 450 kg nicht überschreiten: $70 + 36x \leq 450$, $36x \leq 380$, $x \leq 10{,}56$. Abrunden: höchstens 10 Kisten. Kontrolle: $70 + 360 = 430 \leq 450$, aber $70 + 396 = 466 > 450$.

b) $140 + 36x \leq 450$, $36x \leq 310$, $x \leq 8{,}61$. Höchstens 8 Kisten.

c) $70 + 42x \leq 450$, $42x \leq 380$, $x \leq 9{,}05$. Höchstens 9 Kisten.

Antwort: 10, 8 bzw. 9 Kisten.

Lösung zu Aufgabe 9

a) A ist günstiger, wenn $8 + 0{,}05x$. Subtraktion von $0{,}05x$: 8, also $x > 160$. Ab 161 Minuten ist A günstiger; bei genau 160 Minuten kosten beide 16 €.

b) $8 + 0{,}05x \leq 15$, $0{,}05x \leq 7$, $x \leq 140$ Minuten.

c) $0{,}1x \leq 15$, $x \leq 150$ Minuten.

d) Wer im Monat weniger als 160 Minuten telefoniert, zahlt bei Tarif B weniger, Vieltelefonierer sind mit Tarif A besser beraten.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Die Kosten dürfen höchstens 1100 € betragen: $300 + 32x \leq 1100$, $32x \leq 800$, $x \leq 25$. Es dürfen höchstens 25 Personen mitfahren.

b) Mindestens 18 und höchstens 25 Personen: $18 \leq x \leq 25$. Das sind $25 - 18 + 1 = 8$ mögliche Teilnehmerzahlen.

c) Bei 18 Personen: *(300+32\cdot18):18=876:18\approx48{,}67\,€*. Bei 25 Personen: *1100:25=44{,}00\,€*.

Antwort: Je mehr Personen mitfahren, desto günstiger wird es für jeden, weil sich der Buspreis auf mehr Personen verteilt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Mindestens 60 und höchstens 100 km/h: $60 \leq v \leq 100$.

b) Zeit = Strecke durch Geschwindigkeit: $150 : 100 = 1{,}5\,\text{h}$ und $150 : 60 = 2{,}5\,\text{h}$.

c) $\frac{150}{v} \leq 2$. Multiplikation mit v (positiv): $150 \leq 2v$, also $v \geq 75\,\text{km/h}$.

d) Beide Bedingungen zusammen: $75 \leq v \leq 100$.

Antwort: Für höchstens zwei Stunden Fahrzeit muss die Familie im Schnitt zwischen 75 und 100 km/h fahren.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Erlaubt ist $2 \leq T \leq 7$. $5{,}5$ und $2{,}5$ liegen im Bereich. 8 ist zu warm, $1{,}5$ ist zu kalt.

b) Erlaubt ist $T \leq -18$. -20 und -18 erfüllen das. -17 ist größer als -18, also zu warm.

c) Temperatur nach t Stunden: $-20 + 1{,}5t$. Bedingung: $-20 + 1{,}5t \leq -18$, $1{,}5t \leq 2$, $t \leq 1{,}33\,\text{h}$. Das sind etwa $1\,\text{h}\,20\,\text{min}$.

Antwort: Rund 80 Minuten bleibt die Temperatur im erlaubten Bereich.

Lösung zu Aufgabe 13

Bisherige Summe: $78 + 85 + 72 = 235$ Punkte. Mit der vierten Arbeit x ist der Durchschnitt $\frac{235+x}{4}$.

a) $\frac{235+x}{4} \geq 80 \;\vert\; \cdot 4$: $235 + x \geq 320$, $x \geq 85$. Sie braucht mindestens 85 Punkte.

b) $\frac{235+x}{4} \geq 75$: $235 + x \geq 300$, $x \geq 65$. Mindestens 65 Punkte.

c) Mit voller Punktzahl: $\frac{235+100}{4} = \frac{335}{4} = 83{,}75$ Punkte. Mehr ist nicht möglich.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Breite x, Länge $x+6$. Der Umfang darf 40 m nicht überschreiten: $2(x+x+6) \leq 40$, $4x+12 \leq 40$, $4x \leq 28$, $x \leq 7$.

b) Zusätzlich $x \geq 5$, also $5 \leq x \leq 7$.

c) Fläche = Breite mal Länge: $x=5$: $5 \cdot 11 = 55\,\mathrm{m}^2$. $x=6$: $6 \cdot 12 = 72\,\mathrm{m}^2$. $x=7$: $7 \cdot 13 = 91\,\mathrm{m}^2$.

Antwort: Die größte Fläche von 91 m² entsteht bei 7 m Breite; dann wird der Zaun genau aufgebraucht.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Kosten B: $12+3x$. A ist günstiger, wenn $12+3x > 29$: $3x > 17$, $x > 5{,}67$. Ab 6 Besuchen lohnt sich A.

b) $12+3x > 21{,}75$: $3x > 9{,}75$, $x > 3{,}25$. Mit Rabatt lohnt sich A schon ab 4 Besuchen.

c) Bei 8 Besuchen: A *29\,€*, B *12+3\cdot8=36\,€*. A ist um *7{,}00\,€* günstiger.

d) $12+3x \leq 30$, $3x \leq 18$, $x \leq 6$. Bei Studio B sind höchstens 6 Besuche für 30 € möglich.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $45+7w \geq 129$, $7w \geq 84$, $w \geq 12$. Nach 12 Wochen hat Max genau 129 €.

b) $55+7w \geq 129$, $7w \geq 74$, $w \geq 10{,}57$. Aufrunden: nach 11 Wochen (*132\,€*).

c) $45+9w \geq 129$, $9w \geq 84$, $w \geq 9{,}33$. Nach 10 Wochen (*135\,€*).

d) Sparbetrag s: $45+8s \geq 129$, $8s \geq 84$, $s \geq 10{,}50$. Max müsste mindestens *10{,}50\,€* pro Woche sparen.

Bei „mindestens“ wird immer auf die nächste ganze Woche aufgerundet.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $35+0{,}03x$: 25, $x > 500$. Ab 501 Kopien ist A günstiger.

b) A: *35+0{,}03\cdot1200=35+36=71{,}00\,€*. B: *10+0{,}08\cdot1200=10+96=106{,}00\,€*.

c) A: $35+0{,}03x \leq 60$, $0{,}03x \leq 25$, $x \leq 833$. B: $10+0{,}08x \leq 60$, $0{,}08x \leq 50$, $x \leq 625$.

d) Bei 1200 Kopien spart die Schule mit A monatlich *35\,€* und kann mit dem gleichen Budget mehr kopieren. Deshalb empfiehlt sich Angebot A.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Hin- und Rückweg sind zusammen $2x$ Kilometer, der Verbrauch also $4 \cdot 2x = 8x$ Prozent. Es sollen mindestens 10 % übrig bleiben: $100 - 8x \geq 10$, $8x \leq 90$, $x \leq 11{,}25\,\text{km}$.

b) $100 - 8x \geq 20$, $8x \leq 80$, $x \leq 10\,\text{km}$.

c) Ja, denn $9 \leq 10$. Es bleiben $100 - 72 = 28\,\%$.

d) $2 \cdot 9 \cdot 4 = 72\,\%$.

Antwort: Bei 20 % Reserve darf das Ziel höchstens 10 km entfernt sein.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Jahreskarte günstiger als Einzelkarten: $4{,}5x > 120$, $x > 26{,}67$. Ab 27 Besuchen.

b) Gegenüber Zehnerkarten: $3{,}6x > 120$, $x > 33{,}3$. Ab 34 Besuchen.

c) 20 Wochen mal 2 Besuche = 40 Besuche. Einzelkarten: *40\cdot4{,}50=180\,€*. Zehnerkarten: 4 Stück, *4\cdot36=144\,€*. Jahreskarte: *120\,€*.

d) Die Jahreskarte ist am günstigsten: *180-120=60{,}00\,€* Ersparnis gegenüber Einzelkarten.

Antwort: Lena sollte die Jahreskarte kaufen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Erste Bedingung: $3x - 5 > 2x + 1$, also $x > 6$. Zweite Bedingung: $3x - 5$, also -5, d. h. $x > -5$. Beide müssen gelten. Jede Zahl größer als 6 ist auch größer als -5, also $\mathbb{L} = \{x \mid x > 6\}$.

b) $x + 3 > x + 1$: Subtraktion von x ergibt $3 > 1$, immer wahr, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$. $x - 2 > x + 1$ ergibt $-2 > 1$, nie wahr, $\mathbb{L} = \{\,\}$.

c) 7: 10: 5.