Lernzettel - Terme aufstellen und umformen

Klasse: Klasse 7

Terme beschreiben viele Rechnungen auf einmal. Hier lernst du, Terme aufzustellen, zusammenzufassen, auszumultiplizieren und auszuklammern.

Einstieg: Der Eisstand

Ein Eisverkäufer verkauft die Kugel für *1{,}20\,€*. Heute hat er x Kugeln verkauft. Statt jeden Tag eine neue Rechnung zu schreiben, nutzt er einen Term: $1{,}2 \cdot x$. Für $x = 50$ ergibt das *60\,€*, für $x = 80$ sind es *96\,€*. Ein Term ist wie eine Rechenmaschine: Du gibst eine Zahl ein, und heraus kommt das Ergebnis. In diesem Kapitel lernst du, solche Rechenmaschinen aufzustellen und geschickt umzubauen.

Variablen und Terme

Definition: Term

Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck aus Zahlen, Variablen (Platzhaltern wie x, a, n) und Rechenzeichen, zum Beispiel $3x + 5$, $a \cdot b$ oder $2(n - 4)$. Ein Term enthält kein Gleichheitszeichen.

Definition: Termwert

Setzt man für die Variable eine Zahl ein, erhält man den **Termwert**. Für $T(x) = 3x + 5$ und $x = 4$ gilt $T(4) = 3 \cdot 4 + 5 = 17$.

Beispiel 1: Mit negativer Zahl einsetzen

Berechne den Termwert von $2x^2 - 3x + 1$ für $x = -2$.

Setze in Klammern ein: $2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 2 \cdot 4 + 6 + 1 = 15$.

Terme aufstellen

Regel: Übersetzen

„Das Doppelte von x“ heißt $2x$. „Um 5 größer als x“ heißt $x + 5$. „Die Hälfte von x“ heißt $\frac{x}{2}$. „Das Quadrat von x“ heißt x^2. „Die Summe aus x und y, mal 3“ heißt $3(x + y)$.

Beispiel 2: Handyvertrag

Ein Handyvertrag kostet 9,50 € Grundgebühr plus 0,10 € pro Minute. Stelle einen Term für m Minuten auf.

$9{,}50 + 0{,}10\,m$. Zum Vergleich: Der Umfang eines Rechtecks ist $u = 2a + 2b = 2(a + b)$, sein Flächeninhalt $A = a \cdot b$.

Beispiel 3: Grundstück

Ein Grundstück ist x Meter lang und $x - 8$ Meter breit. Stelle einen Term für den Umfang auf und berechne ihn für $x = 30$.

$u = 2x + 2(x - 8) = 2x + 2x - 16 = 4x - 16$. Für $x = 30$ ergibt sich $u = 104$ Meter.

Zusammenfassen gleichartiger Glieder

Definition: gleichartige Glieder

Glieder mit derselben Variablen (und gleicher Potenz) heißen **gleichartig**. Man fasst sie zusammen, indem man ihre Zahlfaktoren (Koeffizienten) addiert oder subtrahiert: $3x + 5x = 8x$, $7a - 2a + a = 6a$, $4x^2 + 3x^2 = 7x^2$. Dagegen lassen sich $3x$ und $3x^2$ oder $2a$ und $2b$ nicht zusammenfassen.

Beispiel 4: Zusammenfassen

Fasse zusammen: $5x + 3y - 2x + 7y - 4$.

Sortiere nach Variablen: $(5x - 2x) + (3y + 7y) - 4 = 3x + 10y - 4$.

Ausmultiplizieren

Regel: Distributivgesetz

$a(b + c) = ab + ac$. Jedes Glied in der Klammer wird mit dem Faktor vor der Klammer multipliziert. Dabei gelten die Vorzeichenregeln: $-3(x - 4) = -3x + 12$.

Regel: Zwei Klammern

Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten multipliziert: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Beispiel: $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$.

Beispiel 5: Ausmultiplizieren und zusammenfassen

Vereinfache $2(3x - 1) - 4(x - 5)$.

Schritt 1: $6x - 2 - 4x + 20$. Schritt 2: $(6x - 4x) + (-2 + 20) = 2x + 18$.

Ausklammern

Definition: Ausklammern

Ausklammern ist die Umkehrung des Ausmultiplizierens. Man sucht den größten gemeinsamen Faktor aller Glieder und schreibt ihn vor eine Klammer: $6x + 9 = 3(2x + 3)$ und $12a - 8ab = 4a(3 - 2b)$.

Hinweis

Mit einer Rückkontrolle durch Ausmultiplizieren erkennst du Fehler sofort.

Terme vereinfachen

So gehst du vor: Terme vereinfachen

1. Löse zuerst alle Klammern auf, indem du ausmultiplizierst und auf die Vorzeichen achtest.
2. Markiere gleichartige Glieder.
3. Fasse sie zusammen und ordne den Term: zuerst die höchste Potenz, am Ende die reine Zahl.
4. Mache eine Probe mit einer kleinen Zahl.

Beispiel 6: Vereinfachen mit Probe

Vereinfache $3(x + 2y) - 2(x - y) + 4$.

Schritt 1: $3x + 6y - 2x + 2y + 4$. Schritt 2 und 3: $(3x - 2x) + (6y + 2y) + 4 = x + 8y + 4$. Probe mit $x = 1$, $y = 1$: Anfangsterm $3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 4 = 13$, Endterm $1 + 8 + 4 = 13$.

Beispiel 7: Verein

Ein Verein zahlt 120 € Miete für die Turnhalle, jedes Mitglied zahlt 5 €. Stelle einen Term für den Überschuss auf.

$5n - 120$. Ab $n = 24$ Mitgliedern wird der Wert nicht mehr negativ. Ein Term beschreibt alle Fälle auf einmal.

Binomische Formeln als Ausblick

Satz: Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Hinweis

In vielen Bundesländern behandelt man diese Formeln in Klasse 8. Ein Blick darauf ist trotzdem eine gute Übung beim Ausmultiplizieren.

Beispiel 10: Im Alltag (Pizza-Bestellung)

Eine Pizza kostet *7{,}50\,€*, die Lieferung *2\,€*. Stelle einen Term für n Pizzen auf und berechne den Preis für 4 Pizzen.

$K = 7{,}5n + 2$. Für $n = 4$: *7{,}5\cdot4+2=32\,€*. Der feste Anteil *2\,€* ändert sich nicht, nur der Anteil $7{,}5n$ wächst mit n.

Beispiel 11: Minus vor der Klammer

Vereinfache $7x - (3x - 5)$.

Das Minus kehrt alle Vorzeichen in der Klammer um: $7x - 3x + 5 = 4x + 5$. Prüfe mit $x = 2$: Ursprünglich $14 - (6 - 5) = 13$; vereinfacht $8 + 5 = 13$. Beide Werte stimmen.

Beispiel 12: Zwei Wege zum selben Term

Ein Rechteck hat die Breite 4 und die Länge $x + 3$. Gib die Fläche auf zwei Arten an.

Als Produkt: $4(x + 3)$. Als Summe zweier Teilflächen: $4x + 12$. Beide Terme sind gleich, denn $4(x + 3) = 4x + 12$.

Typische Fehler

(1) $2(x + 3) = 2x + 3$ schreiben statt $2x + 6$. (2) Unterschiedliche Glieder zusammenfassen: $3x + 4y$ ist nicht $7xy$. (3) Das Minus vor der Klammer vergessen: $5 - (x - 4) = 9 - x$, nicht $5 - x - 4$. (4) x^2 mit $2x$ verwechseln.

Wusstest du?

Buchstaben als Platzhalter für Zahlen nutzte systematisch erst der französische Mathematiker François Viète um das Jahr 1590. Vorher wurden Rechenaufgaben in Worten beschrieben. Der Buchstabe x für die Unbekannte wurde später durch René Descartes üblich.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Term besteht aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen und hat einen Termwert.
- Gleichartige Glieder werden zusammengefasst, indem man die Koeffizienten addiert.

- Distributivgesetz: $a(b+c) = ab + ac$.
- Zwei Klammern: jedes Glied mit jedem Glied multiplizieren.
- Ausklammern ist die Umkehrung des Ausmultiplizierens.
- Minus vor der Klammer kehrt alle Vorzeichen um.

Achtung

Beim Ausmultiplizieren müssen alle Glieder in der Klammer multipliziert werden: $3(x+2) = 3x + 6$, nicht $3x + 2$. Bei Minus vor der Klammer kehren sich alle Vorzeichen um: $5 - (x - 2) = 5 - x + 2$. Ungleichartige Glieder lassen sich nicht zusammenfassen: $2x + 3y$ ist nicht $5xy$. Beim Einsetzen negativer Zahlen Klammern setzen: $(-3)^2 = 9$, nicht -9.

Vertiefung: Mit Termen sicher arbeiten

Einstieg: Zwei Wege, ein Ergebnis

Tom und Aylin sollen den Umfang eines Rechtecks mit den Seiten x und 5 angeben. Tom schreibt $x + 5 + x + 5$, Aylin schreibt $2(x + 5)$. Wer hat recht? Beide! Wenn du Toms Term zusammenfasst, erhältst du $2x + 10$. Wenn du Aylins Term ausmultiplizierst, erhältst du ebenfalls $2x + 10$. Zwei Terme, die für jede eingesetzte Zahl denselben Wert liefern, nennt man **äquivalent** (gleichwertig). Das Umformen von Termen bedeutet also nichts anderes, als einen Term durch einen äquivalenten, meist einfacheren Term zu ersetzen. Genau das übst du in diesem Kapitel.

Definition: äquivalente Terme

Zwei Terme heißen **äquivalent**, wenn sie bei jeder Einsetzung derselben Zahl für die Variable denselben Wert haben. Man schreibt dann ein Gleichheitszeichen zwischen sie, zum Beispiel $3(x+2) = 3x + 6$. Um zu zeigen, dass zwei Terme äquivalent sind, formt man einen Term nach den Rechengesetzen in den anderen um. Um zu zeigen, dass zwei Terme *nicht* äquivalent sind, genügt ein einziges Gegenbeispiel: eine Zahl, bei der verschiedene Werte herauskommen.

Merke: Die Rechengesetze für Terme

Beim Umformen darfst du nur die Gesetze verwenden, die du schon von den Zahlen kennst. Das **Kommutativgesetz** erlaubt es, Summanden oder Faktoren zu vertauschen: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$. Das **Assoziativgesetz** erlaubt es, Klammern bei reinen Summen oder reinen Produkten beliebig zu setzen. Das **Distributivgesetz** verbindet Multiplikation und Addition. Mit diesen drei Gesetzen kannst du jeden Term ordnen, zusammenfassen, ausmultiplizieren und ausklammern.

Beispiel 8: Produkte vereinfachen

Vereinfache $3a \cdot 4b$ und $-2x \cdot 5x$.

Bei einem Produkt ordnest du zuerst die Faktoren: Zahlen nach vorn, Variablen dahinter. Dann multiplizierst du die Zahlen miteinander und schreibst gleiche Variablen als Potenz. So wird $3a \cdot 4b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$. Beim zweiten Produkt beachtest du das Vorzeichen: $-2x \cdot 5x = -10x^2$, denn $x \cdot x = x^2$. Ein häufiger Fehler wäre, $x \cdot x$ als $2x$ zu schreiben. Das ist falsch, denn $2x$ bedeutet $x + x$.

Beispiel 9: Ausklammern mit Variablen

Klammere so weit wie möglich aus: $15x^2 - 10x$.

Suche zuerst den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen: Von 15 und 10 ist das 5. Dann prüfst du die Variablen: In beiden Gliedern steckt mindestens einmal der Faktor x. Der gemeinsame Faktor ist also $5x$. Nun teilst du jedes Glied durch $5x$: $15x^2 : 5x = 3x$ und $10x : 5x = 2$. Ergebnis: $15x^2 - 10x = 5x(3x - 2)$. Zur Kontrolle multiplizierst du wieder aus und erhältst den Ausgangsterm.

So gehst du vor: Einen Term aus einem Text aufstellen

1. Lies den Text genau und lege fest, welche Größe unbekannt ist. Gib ihr einen Namen, zum Beispiel x für die Anzahl.
2. Suche feste Beträge (Grundgebühr, Startwert) und Beträge, die mit der Anzahl wachsen (Preis pro Stück).
3. Schreibe die festen Beträge als Zahl und die wachsenden Beträge als Produkt „Preis mal Anzahl“.
4. Verbinde die Teile mit Plus oder Minus und fasse gleichartige Glieder zusammen.
5. Kontrolliere den Term mit einer einfachen Zahl, deren Ergebnis du im Kopf ausrechnen kannst.

Achtung: Minus vor der Klammer

Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, dann ändern sich beim Auflösen **alle** Vorzeichen in der Klammer, nicht nur das erste. Es gilt $-(x - 4) = -x + 4$ und $10 - (2a + 3) = 10 - 2a - 3 = 7 - 2a$. Viele Fehler entstehen, weil nur das erste Glied umgedreht wird. Denke dir das Minus als -1, das mit jedem Glied der Klammer multipliziert wird.

Schon gewusst?

Die Buchstaben als Platzhalter für Zahlen gehen auf den französischen Mathematiker François Viète zurück, der um 1590 als einer der Ersten mit Buchstaben rechnete. Vorher mussten Rechenwege in langen Sätzen beschrieben werden. Mit Termen lassen sich Rechenregeln kurz und für alle Zahlen gleichzeitig aufschreiben, und genau deshalb benutzen Ingenieure, Programmierer und Tabellenkalkulationen sie bis heute jeden Tag.

Beispiel 13: Wertetabelle als Kontrolle

Prüfe mit einer Wertetabelle, ob $4x-(x-3)$ und $3x+3$ äquivalent sind.

Setze einige Zahlen ein, am besten auch eine negative. Für $x=0$ erhält man links $0-(-3)=3$ und rechts 3. Für $x=2$ erhält man links $8-(-1)=9$ und rechts 9. Für $x=-1$ ergibt sich links $-4-(-4)=0$ und rechts 0. Die Tabelle stimmt überein. Ein Beweis ist aber erst die Umformung: $4x-x+3=3x+3$. Die Tabelle ist also eine gute Kontrolle, die Umformung ist die eigentliche Begründung.

Ottos Tipp

Zähle nach dem Ausmultiplizieren die Glieder nach: Aus 2 Gliedern in der Klammer müssen auch 2 Glieder werden. Bei Unsicherheit setzt du für x eine kleine Zahl wie 2 in Anfangs- und Endterm ein. Kommt beide Male dasselbe heraus, hast du richtig umgeformt.