Lösungen - Statistik: Mittelwert, Median und Boxplot

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

a) Mittelwert = Summe durch Anzahl: $4 + 7 + 9 + 12 + 8 = 40$, $40 : 5 = 8$.

b) Für den Median ordnet man zuerst: 1; 3; 5; 7; 9. Bei fünf Werten steht der Median an dritter Stelle: 5.

c) Geordnet: 2; 4; 6; 8. Bei gerader Anzahl nimmt man den Mittelwert der beiden mittleren Werte: $\frac{4+6}{2} = 5$.

d) Der Modus ist der häufigste Wert. Die 3 kommt dreimal vor, öfter als jede andere Zahl: Modus 3.

e) Spannweite = größter minus kleinster Wert: $19 - 5 = 14$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Summe der Anzahlen: $4 + 6 + 5 + 3 + 7 + 5 = 30$. Es sind 30 Würfe.

b) Relative Häufigkeit = Anzahl durch Gesamtzahl: $\frac{7}{30} \approx 0{,}233 = 23{,}3\,\%$.

c) Der Modus ist die Augenzahl mit der größten Anzahl: die 5 (siebenmal). Für den Mittelwert multipliziert man jede Augenzahl mit ihrer Anzahl:
$4 + 12 + 15 + 12 + 35 + 30 = 108$. Mittelwert: $108 : 30 = 3{,}6$.

Zum Vergleich: Bei einem idealen Würfel erwartet man langfristig den Mittelwert 3,5. Lenas Ergebnis liegt nahe daran.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Jede Note wird mit ihrer Anzahl multipliziert:
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 2 + 12 + 24 + 20 + 10 + 6 = 74$. Durchschnitt:
$74 : 24 \approx 3{,}08$.

b) Bei 24 Noten liegt der Median zwischen dem 12. und 13. Wert. Die ersten 8 Noten sind Einsen und Zweien, die Plätze 9 bis 16 sind Dreien. Also ist der Median 3. Der Modus ist ebenfalls 3, denn sie kommt achtmal vor.

c) Note 4 oder schlechter: $5 + 2 + 1 = 8$ Kinder, $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Die Daten sind schon geordnet. Bei $n = 9$ steht der Median an der fünften Stelle: 9.

b) Der Median trennt die Daten in eine untere Hälfte 3; 5; 6; 8 und eine obere Hälfte 11; 14; 15; 20. Q_1 ist der Median der unteren Hälfte: $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$. Q_3 ist der Median der

oberen Hälfte: $\frac{14+15}{2} = 14{,}5$.

c) Quartilsabstand $Q_3 - Q_1 = 14{,}5 - 5{,}5 = 9$. Spannweite $20 - 3 = 17$.

Die mittlere Hälfte der Daten liegt also in einem Bereich von 9 Einheiten.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Minimum 6, Maximum 25. Bei $n = 8$ liegt der Median zwischen dem 4. und 5. Wert: $\frac{12+14}{2} = 13$.

b) Untere Hälfte $6;\ 9;\ 11;\ 12$: $Q_1 = \frac{9+11}{2} = 10$. Obere Hälfte $14;\ 16;\ 18;\ 25$: $Q_3 = \frac{16+18}{2} = 17$.

c) Quartilsabstand $17 - 10 = 7$. Die Fünf-Punkte-Zusammenfassung lautet Minimum, Q_1, Median, Q_3, Maximum: $6 \mid 10 \mid 13 \mid 17 \mid 25$.

Mit diesen fünf Werten kann man direkt einen Boxplot zeichnen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Der Strich in der Box zeigt den Median: 30 min. Der linke Rand der Box ist $Q_1 = 22$ min, der rechte Rand $Q_3 = 38$ min.

b) Die Antennen reichen von 10 bis 55 min. Spannweite $55 - 10 = 45$ min, Quartilsabstand $38 - 22 = 16$ min.

c) Beide Aussagen stimmen. Links von Q_1 liegt nur ein Viertel der Daten, also warten $75\,\%$ der Patienten mindestens 22 Minuten. Der Median teilt die Daten in zwei gleich große Hälften, also wartet die Hälfte höchstens 30 Minuten.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Summe: *330\,€*. Mittelwert *330:12=27{,}50\,€*. Bei 12 Werten liegt der Median zwischen dem 6. und 7. Wert: *\frac{20+25}{2}=22{,}50\,€*. Der Modus ist *20\,€*, er kommt dreimal vor.

b) Der Wert *80\,€* ist doppelt so groß wie der nächstkleinere und weicht stark ab: Er ist der Ausreißer. Ohne ihn: *250:11\approx22{,}73\,€*.

c) Der Median beschreibt das typische Taschengeld besser. Der Mittelwert wird durch den einen hohen Wert nach oben gezogen: 9 von 12 Kindern bekommen weniger als 27,50 €.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Summe: $95 + 120 + 80 + 150 + 110 + 200 + 105 = 860$ min. Mittelwert $860 : 7 \approx 122{,}9$ min.

b) Geordnet: $80;\ 95;\ 105;\ 110;\ 120;\ 150;\ 200$. Median: der 4. Wert, 110 min. Untere Hälfte $80; 95; 105$, also $Q_1 = 95$. Obere Hälfte $120; 150; 200$, also $Q_3 = 150$. Spannweite $200 - 80 = 120$ min.

c) 2 Stunden sind 120 Minuten. Der Mittelwert $122{,}9$ min liegt knapp darüber.

Antwort: Jonas schafft sein Ziel knapp nicht. Vor allem der Samstag mit 200 Minuten treibt den Durchschnitt nach oben.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Man liest die Säulenhöhen ab: 9, 5, 6, 3 und 7 Kinder. Summe: $9 + 5 + 6 + 3 + 7 = 30$. Alle Kinder sind erfasst.

b) Sport wählten 9 von 30 Kindern: $\frac{9}{30} = 0{,}3 = 30\,\%$.

c) Der ganze Kreis hat $360°$. Sport erhält $30\,\%$ davon: $0{,}3 \cdot 360° = 108°$.

d) Der Modus ist die am häufigsten genannte Antwort, also Sport. Mittelwert und Median gibt es hier nicht, denn Schulfächer sind keine Zahlen und lassen sich nicht sinnvoll ordnen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Summe aller Tore: $2 + 0 + 3 + 1 + 1 + 4 + 2 + 0 + 2 + 5 + 1 + 3 = 24$. Mittelwert: $24 : 12 = 2$ Tore pro Spiel.

b) Geordnet: $0; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 5$. Der 6. und 7. Wert sind beide 2, also Median 2.

c) Die Werte 1 und 2 kommen je dreimal vor, öfter als alle anderen. Es gibt zwei Modi: 1 und 2. Spannweite $5 - 0 = 5$.

d) Untere Hälfte $0; 0; 1; 1; 1; 2$: $Q_1 = 1$. Obere Hälfte $2; 2; 3; 3; 4; 5$: $Q_3 = 3$. Quartilsabstand 2.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Summe: 264. Mittelwert $264 : 10 = 26{,}4\,°\mathrm{C}$. Geordnet: $22; 22; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31$. Median zwischen 5. und 6. Wert: $\frac{26+27}{2} = 26{,}5\,°\mathrm{C}$.

b) Untere Hälfte $22; 22; 24; 25; 26$: $Q_1 = 24$. Obere Hälfte $27; 28; 29; 30; 31$: $Q_3 = 29$. Fünf-Punkte-Zusammenfassung: $22 \mid 24 \mid 26{,}5 \mid 29 \mid 31$.

c) Die Box reicht von 24 bis 29, der Quartilsabstand beträgt 5 Grad. Mittelwert und Median liegen nah beieinander, die Daten sind also recht gleichmäßig verteilt.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Jede Dauer wird mit ihrer Anzahl multipliziert: $5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 10 + 40 + 75 + 60 + 30 = 215$. Mittelwert: $215 : 15 \approx 14{,}3$ min.

b) Bei 15 Werten ist der Median der 8. Wert. Die ersten 6 Werte sind 5 oder 10 Minuten, die Plätze 7 bis 11 sind 15 Minuten. Median: 15 min. Der Modus ist ebenfalls 15 min (fünfmal).

c) Höchstens 10 Minuten brauchen $2 + 4 = 6$ Kinder: $\frac{6}{15} = 40\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Mittelwert 24 bei 5 Tagen bedeutet eine Summe von $5 \cdot 24 = 120$ Minuten. Die vier bekannten Tage ergeben $20 + 30 + 22 + 25 = 97$. Am fünften Tag: $120 - 97 = 23$ Minuten.

b) Neue Summe $120 + 40 = 160$, sechs Tage: $160 : 6 \approx 26{,}7$ Minuten.

c) Für einen Mittelwert von 30 bei 6 Tagen braucht man $6 \cdot 30 = 180$ Minuten insgesamt. Am sechsten Tag: $180 - 120 = 60$ Minuten.

Bei solchen Aufgaben rechnet man immer über die Summe der Werte.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Anteil = Anzahl durch 150: Vanille $\frac{45}{150} = 30\,\%$, Schoko $\frac{60}{150} = 40\,\%$, Erdbeere $20\,\%$, Zitrone $10\,\%$.

b) Jedes Prozent entspricht $3{,}6^\circ$: Vanille 108°, Schoko 144°, Erdbeere 72°, Zitrone 36°. Summe 360°.

c) Schoko wurde am häufigsten verkauft und ist der Modus. Einen Median kann man nur bestimmen, wenn sich die Werte der Größe nach ordnen lassen. Eissorten haben keine natürliche Reihenfolge, deshalb ist ein Median nicht sinnvoll.

Lösung zu Aufgabe 15

a) 7a: Summe 162, Mittelwert $162 : 12 = 13{,}5$; Median $\frac{13+14}{2} = 13{,}5$. 7b: Summe 165, Mittelwert $13{,}75$; Median $\frac{14+15}{2} = 14{,}5$.

b) 7a: Spannweite $19 - 8 = 11$; $Q_1 = 11{,}5$, $Q_3 = 15{,}5$, Quartilsabstand 4. 7b: Spannweite $20 - 5 = 15$; $Q_1 = 9{,}5$, $Q_3 = 18{,}5$, Quartilsabstand 9.

c) 7a: $8 \mid 11{,}5 \mid 13{,}5 \mid 15{,}5 \mid 19$. 7b: $5 \mid 9{,}5 \mid 14{,}5 \mid 18{,}5 \mid 20$.

d) Im Mittel sind beide Klassen fast gleich, 7b hat einen etwas höheren Median. 7b streut aber viel stärker: Dort gibt es sehr gute und sehr schwache Arbeiten. Klasse 7a ist gleichmäßiger.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Höchstens 220 s schaffen $215;\ 198;\ 205;\ 198;\ 210;\ 218;\ 202$, also 7 Läuferinnen.

b) Summe 2138 s, Mittelwert $213{,}8$ s. Geordnet:
$198; 198; 202; 205; 210; 215; 218; 222; 230; 240$. Median $\frac{210+215}{2} = 212{,}5$ s.

c) Untere Hälfte $198; 198; 202; 205; 210$: $Q_1 = 202$. Obere Hälfte $215; 218; 222; 230; 240$: $Q_3 = 222$. Quartilsabstand 20 s, Spannweite 42 s.

d) Mit 300 s: Summe 2438, Mittelwert $2438 : 11 \approx 221{,}6$ s. Der Median ist nun der 6. von 11 Werten: 215 s. Der Mittelwert steigt um fast 8 s, der Median nur um 2,5 s.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Summe: *975\,€*. Mittelwert *975:20=48{,}75\,€*. Median zwischen 10. und 11. Wert: *\frac{20+20}{2}=20\,€*. Modus *10\,€*, er kommt viermal vor.

b) Ohne die *500\,€*: *475:19=25\,€*. Ein einziger Wert hat den Mittelwert fast verdoppelt.

c) Für das typische Ergebnis passt der Median von *20\,€*, denn er wird vom Ausreißer nicht beeinflusst. Die Hälfte der Läufer hat höchstens 20 € gesammelt.

d) Insgesamt wurden *975\,€* für das Tierheim gesammelt. Für diese Frage ist die Summe entscheidend, nicht ein Lagemaß.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Man liest die fünf Kennwerte ab: Modell A: $8 \mid 10 \mid 12 \mid 14 \mid 17$. Modell B: $6 \mid 11 \mid 13 \mid 16 \mid 20$ (in Stunden).

b) A: Spannweite $17 - 8 = 9$ h, Quartilsabstand $14 - 10 = 4$ h. B: Spannweite $20 - 6 = 14$ h, Quartilsabstand $16 - 11 = 5$ h.

c) (1) Stimmt: $Q_1 = 11$, also liegen drei Viertel der Werte bei mindestens 11 Stunden. (2) Falsch: Der Median von A ist 12 h, der von B 13 h.

d) Für Zuverlässigkeit spricht Modell A: Seine Werte streuen weniger, schlechte Ausreißer nach unten (bis 6 h bei B) gibt es kaum. Wer im Schnitt längere Laufzeit will, nimmt B.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Achse beginnt bei 90, also zählt nur der Teil über 90: Januar $94 - 90 = 4$, Februar 6, März 8, April 10 Kästchen.

b) Im Diagramm ist die April-Säule $10 : 4 = 2{,}5$-mal so hoch wie die Januar-Säule. Tatsächlich gilt $100 : 94 \approx 1{,}06$.

c) Anstieg $100 - 94 = 6$ Tausend, bezogen auf Januar: $\frac{6}{94} \approx 6{,}4\,\%$.

d) Wegen der abgeschnittenen Achse wirkt ein kleiner Anstieg von gut 6 % wie eine Verdopplung. Besser lässt man die Achse bei 0 beginnen oder kennzeichnet die Unterbrechung deutlich mit einem Achsenbruch.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Man ordnet fünf Zahlen $a \le b \le c \le d \le e$. Der Median ist $c = 8$. Damit 6 der Modus ist, braucht man zwei Sechsen: $a = b = 6$. Spannweite 12 bedeutet $e = 6 + 12 = 18$. Mittelwert 10 bedeutet Summe 50: $6 + 6 + 8 + d + 18 = 50$, also $d = 12$. Lösung: $6;\ 6;\ 8;\ 12;\ 18$.

b) Beide Summen sind 15, beide Mittelwerte also $15 : 5 = 3$. Spannweiten: $4 - 2 = 2$ und $5 - 1 = 4$. Der zweite Datensatz streut stärker.

c) Ja. Wenige sehr hohe Gehälter heben den Mittelwert so stark an, dass die meisten Gehälter darunter liegen. Der Median wäre aussagekräftiger.