Lernzettel - Rationale Zahlen

Klasse: Klasse 7

Zu den ganzen Zahlen kommen jetzt Brüche und Dezimalzahlen mit Vorzeichen hinzu. Hier lernst du, mit allen rationalen Zahlen sicher zu rechnen.

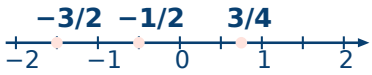
Einstieg: Minus auf dem Thermometer

Im Januar zeigt das Thermometer morgens $-6\,^{\circ}\mathrm{C}$, mittags $+2\,^{\circ}\mathrm{C}$. Um wie viel Grad ist es wärmer geworden? Du zählst auf der Skala: erst 6 Striche bis zur Null, dann 2 weiter, also 8 Grad. Ähnlich ist es beim Kontostand: *30\,€* Guthaben und *50\,€* Ausgaben ergeben *-20\,€*, also Schulden. Mit negativen Zahlen kann man Richtungen, Temperaturen, Höhen unter Normalnull und Schulden beschreiben.

Was sind rationale Zahlen?

Definition: rationale Zahlen

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ umfassen alle Zahlen, die sich als Bruch $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben lassen. Dazu gehören ganze Zahlen (-3, 0, 5), Brüche ($-\frac{3}{4}$) und alle endlichen oder periodischen Dezimalzahlen ($-0{,}25$ oder $0{,}\overline{3}$).



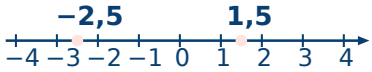
Hinweis

Negative Zahlen kennst du aus dem Alltag: Temperaturen unter null Grad, Kontostände im Minus oder Höhen unter dem Meeresspiegel.

Zahlengerade, Betrag und Vergleichen

Merke: Ordnen

Auf der Zahlengeraden liegen negative Zahlen links von der Null, positive rechts. Je weiter rechts eine Zahl liegt, desto größer ist sie. Es gilt -5 und $-0{,}5 > -0{,}75$.



Definition: Betrag und Gegenzahl

Der **Betrag** $|a|$ einer Zahl ist ihr Abstand zur Null. Er ist nie negativ: $|-4| = 4$,

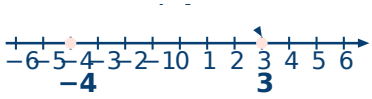
$|3{,}5| = 3{,}5$, $|0| = 0$. Zwei Zahlen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, heißen **Gegenzahlen**, zum Beispiel 7 und -7. Ihre Summe ist 0.

Beispiel 1: Brüche und Dezimalzahlen vergleichen

Vergleiche $-\frac{5}{8}$ und $-0{,}6$.

Man wandelt um: $-\frac{5}{8} = -0{,}625$. Weil $0{,}625 > 0{,}6$ ist, liegt $-0{,}625$ weiter links. Also gilt $-\frac{5}{8}$.

Addieren und Subtrahieren



Regel: Addieren

Gleiche Vorzeichen: Beträge addieren, Vorzeichen behalten. Beispiel: $(-3) + (-5) = -8$. **Verschiedene Vorzeichen:** Beträge subtrahieren (größerer minus kleinerer), das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag übernehmen. Beispiel: $(-9) + 4 = -5$.

Regel: Subtrahieren

Subtrahieren heißt, die Gegenzahl addieren: $a - b = a + (-b)$. Also $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$.

Beispiel 2: Subtraktion als Addition

Berechne $-7 + 12 - (-5)$.

Subtraktion als Addition der Gegenzahl: $-7 + 12 + 5$. Dann $-7 + 12 = 5$ und $5 + 5 = 10$. Ergebnis: 10.

Beispiel 3: Temperatur

Die Temperatur beträgt morgens $-3{,}5\,^\circ\mathrm{C}$, steigt um $8\,^\circ\mathrm{C}$ und fällt dann um $6{,}5\,^\circ\mathrm{C}$.

$-3{,}5 + 8 - 6{,}5 = -2$. Es sind $-2\,^\circ\mathrm{C}$.

Multiplizieren und Dividieren

Regel: Vorzeichenregel

Man multipliziert bzw. dividiert die Beträge. Das Vorzeichen ist **plus**, wenn beide Vorzeichen gleich sind, und **minus**, wenn sie verschieden sind. Durch null darf man nie teilen.

Beispiel 4: Produkte und Quotienten

Berechne $(-6)\cdot(-3)$, $(-6)\cdot 3$, $(-20):(-4)$ und $20:(-4)$.

$(-6)\cdot(-3)=18$, $(-6)\cdot 3=-18$, $(-20):(-4)=5$, $20:(-4)=-5$.

Merke: Merkhilfen

Zwei Minuszeichen hintereinander werden zu einem Pluszeichen: $-(-a)=a$. Ein Produkt mit einer geraden Anzahl negativer Faktoren ist positiv, mit einer ungeraden negativ. Der Betrag einer Summe ist nicht die Summe der Beträge: $|-3+5|=2$, aber $|-3|+|5|=8$.

Brüche und Dezimalzahlen

Regel: Mit Brüchen rechnen

Es gelten dieselben Vorzeichenregeln. Beim Addieren und Subtrahieren braucht man den Hauptnenner. Beim Multiplizieren multipliziert man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, beim Dividieren mit dem Kehrbruch. Dezimalzahlen rechnet man wie gewohnt und setzt das Vorzeichen nach den Regeln.

So gehst du vor: Rationale Zahlen verknüpfen

1. Bestimme zuerst das Vorzeichen des Ergebnisses.
2. Rechne mit den Beträgen: Brüche mit Hauptnenner (Addition, Subtraktion) oder mit Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner (Multiplikation).
3. Beim Dividieren multiplizierst du mit dem Kehrbruch.
4. Kürze das Ergebnis und prüfe das Vorzeichen.

Beispiel 5: Addition

Berechne $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{6}$.

Hauptnenner 12: $-\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{1}{12}$.

Beispiel 6: Multiplikation

Berechne $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)$.

Minus mal minus ergibt plus. Kürzen vor dem Ausrechnen: $\frac{3\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$.

Beispiel 7: Division

Berechne $\frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{9}\right)$.

$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$.

Beispiel 8: Dezimalzahlen

Berechne $(-2{,}5) \cdot (-4) + (-18) : 3$.

Punkt vor Strich: $(-2{,}5) \cdot (-4) = 10$ und $(-18) : 3 = -6$. Summe: $10 + (-6) = 4$.

Rechengesetze und Reihenfolge

Regel: Reihenfolge

Es gelten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz. Klammern zuerst, dann Punkt vor Strich. Minus vor einer Klammer kehrt alle Vorzeichen in der Klammer um: $5 - (3 - 8) = 5 - 3 + 8 = 10$.

Beispiel 9: Im Alltag (Kontostand)

Auf dem Konto sind *35\,€*. Es werden *48\,€* abgebucht und danach *20\,€* eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand?

$35 - 48 = -13$, dann $-13 + 20 = 7$. Der Kontostand beträgt *7\,€*. Zwischendurch war das Konto mit *13\,€* im Minus.

Beispiel 10: Abstand auf der Zahlengeraden

Wie weit sind $-4{,}5$ und 2 voneinander entfernt?

Abstand $= 2 - (-4{,}5) = 2 + 4{,}5 = 6{,}5$. Alternativ: $4{,}5$ bis zur Null, dann 2 weiter.

Beispiel 11: Mehrere Vorzeichen

Berechne $(-3) \cdot (-2) \cdot (-5)$ und $-8 : (-4) \cdot (-3)$.

Erste Aufgabe: $(-3) \cdot (-2) = 6$, dann $6 \cdot (-5) = -30$. Zweite Aufgabe von links nach rechts: $-8 : (-4) = 2$, dann $2 \cdot (-3) = -6$. Faustregel: Eine gerade Anzahl negativer Faktoren ergibt $+$, eine ungerade $-$.

Typische Fehler

(1) -3^2 und $(-3)^2$ verwechseln. (2) $a - (-b)$ als $a - b$ rechnen. (3) Das Minus als Rechenzeichen und als Vorzeichen nicht unterscheiden. (4) Bei zwei negativen Zahlen die größere für die kleinere halten: -8.

Wusstest du?

Negative Zahlen wurden in China schon vor über 2 000 Jahren zum Rechnen benutzt, rote Stäbchen standen für Gewinn, schwarze für Schulden. In Europa wurden sie lange abgelehnt und erst im 17. Jahrhundert allgemein akzeptiert. Der tiefste Punkt der Erde an Land liegt am Toten Meer, etwa $430\,\mathrm{m}$ unter dem Meeresspiegel.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Rationale Zahlen sind alle Zahlen der Form $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$.
- Der Betrag ist der Abstand zur Null und nie negativ.
- Subtrahieren heißt Gegenzahl addieren.
- Gleiche Vorzeichen beim Multiplizieren und Dividieren ergeben plus, verschiedene minus.
- Brüche: Hauptnenner beim Addieren, Kehrbruch beim Dividieren.
- Klammern zuerst, dann Punkt vor Strich.

Achtung

$-3 - 5$ ist -8, nicht 2. Bei $-(a - b)$ müssen beide Vorzeichen umgekehrt werden. -8 ist kleiner als -3, obwohl $8 > 3$ ist. Beim Dividieren von Brüchen mit dem Kehrbruch rechnen.

Vertiefung: Rechnen mit rationalen Zahlen verstehen

Einstieg: Warum ist Minus mal Minus gleich Plus?

Viele lernen die Vorzeichenregeln auswendig, ohne zu wissen, warum sie gelten. Betrachte die Reihe $3 \cdot (-2) = -6$, $2 \cdot (-2) = -4$, $1 \cdot (-2) = -2$, $0 \cdot (-2) = 0$. Mit jedem Schritt wird der erste Faktor um 1 kleiner, und das Ergebnis wird jedes Mal um 2 größer. Setzt man das Muster fort, erhält man $(-1) \cdot (-2) = 2$ und $(-2) \cdot (-2) = 4$. Die Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ ist also keine willkürliche Vereinbarung, sondern die einzige Möglichkeit, das Muster sinnvoll fortzusetzen. Nur so bleiben alle Rechengesetze, die du von den positiven Zahlen kennst, auch für negative Zahlen gültig.

Definition: Zahlbereiche

Die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ reichen zum Zählen. Nimmt man die negativen ganzen Zahlen hinzu, erhält man die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$. Alle Zahlen, die sich als Bruch $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und $q \neq 0$ schreiben lassen, bilden die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$. Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl, denn zum Beispiel ist $-3 = \frac{-3}{1}$. Auch abbrechende und periodische Dezimalzahlen wie $0{,}25$ oder $0{,}\overline{3}$ gehören zu $\mathbb{Q}$.

Merke: Rechengesetze gelten weiter

Für rationale Zahlen gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz genauso wie für natürliche Zahlen. Das kannst du zum geschickten Rechnen nutzen. Statt $-17 + 38 + 17$ von links nach rechts zu rechnen, vertauschst du: $-17 + 17 + 38 = 0 + 38 = 38$. Und statt $-4 \cdot 13 \cdot 25$ rechnest du $(-4 \cdot 25) \cdot 13 = -100 \cdot 13 = -1300$. Suche immer nach Zahlen, die sich zu 0, 10 oder 100 ergänzen.

So gehst du vor: Das Vorzeichen eines langen Produkts bestimmen

1. Zähle, wie viele Faktoren negativ sind.
2. Ist die Anzahl gerade (0, 2, 4, ...), ist das Ergebnis positiv. Ist sie ungerade (1, 3, 5, ...), ist es negativ.
3. Multipliziere danach nur noch die Beträge der Faktoren.
4. Setze das Vorzeichen aus Schritt 2 vor das Ergebnis.

Beispiel 12: Vorzeichen zuerst

Berechne $(-2) \cdot 3 \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 2$.

Es gibt drei negative Faktoren, also eine ungerade Anzahl. Das Ergebnis ist negativ. Die Beträge ergeben $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 = 60$. Ergebnis: -60. So vermeidest du, dass du bei jedem einzelnen Schritt über das Vorzeichen nachdenken musst und dabei Fehler machst.

Beispiel 13: Gemischte Aufgabe mit Brüchen

Berechne $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$.

Zuerst wird multipliziert (Punkt vor Strich): $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$. Danach subtrahierst du: $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Das Minus vor einer negativen Zahl wird also zum Plus. Wer die Reihenfolge missachtet und zuerst von links rechnet, erhält ein falsches Ergebnis.

Achtung: Potenzen negativer Zahlen

Es ist ein großer Unterschied, ob die Klammer steht oder nicht. $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, aber $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$. Ohne Klammer bezieht sich das Quadrat nur auf die 3, das Minuszeichen kommt danach. Auch der Taschenrechner unterscheidet die beiden Eingaben. Setze negative Zahlen beim Potenzieren und beim Einsetzen in Terme deshalb immer in Klammern.

Schon gewusst?

Negative Zahlen wurden lange Zeit abgelehnt. Noch im 16. Jahrhundert nannten

europäische Mathematiker sie „absurde Zahlen“, weil man sich weniger als nichts nicht vorstellen konnte. In China dagegen rechnete man schon vor rund 2000 Jahren mit roten Rechenstäbchen für positive und schwarzen für negative Zahlen. Kaufleute machten die negativen Zahlen schließlich populär, denn mit ihnen lassen sich Schulden und Guthaben in einer einzigen Rechnung erfassen. Daher kommt auch der Ausdruck „in den roten Zahlen sein“.

Beispiel 14: Geschickt rechnen

Berechne möglichst geschickt: $-3{,}7 + 12{,}4 + 3{,}7 - 2{,}4$**.**

Von links nach rechts zu rechnen ist mühsam. Besser ist es, Zahl und Gegenzahl zu suchen: $-3{,}7$ und $3{,}7$ heben sich auf, denn ihre Summe ist null. Es bleibt $12{,}4 - 2{,}4 = 10$. Mit dem Kommutativgesetz darfst du die Summanden samt ihrem Vorzeichen beliebig umstellen. Wichtig ist nur, dass jedes Vorzeichen an seiner Zahl „kleben“ bleibt, wenn du sie verschiebst.

Hinweis: Vorzeichen und Rechenzeichen

Das Minuszeichen hat zwei Bedeutungen: Es kann eine Rechenoperation sein (subtrahieren) oder das Vorzeichen einer Zahl. In $5 - (-3)$ ist das erste Minus ein Rechenzeichen, das zweite ein Vorzeichen. Klammern helfen, beides auseinanderzuhalten.

Ottos Tipp

Mache dir bei jeder Aufgabe zuerst das Vorzeichen des Ergebnisses klar und rechne erst danach mit den Beträgen. Dann fällt dir ein Vorzeichenfehler sofort auf. Mit einer Skizze der Zahlengeraden gelingt das Addieren und Subtrahieren besonders sicher.