# Lernzettel - Prozentrechnung

Klasse: Klasse 7

Prozente begegnen dir bei Rabatten, Steuern und Wahlergebnissen. Hier lernst du Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert, Änderungen mit dem Wachstumsfaktor und die Fallen bei Prozentpunkten.

**Einstieg: Rabatt-Rätsel**

Im Sportgeschäft hängt ein Schild: „Alle Sneaker $30\,\%$ billiger!“ Ein Paar kostet vorher *90*\,€. Lena sagt: „Dann zahle ich *60*\,€.“ Tim meint: „Nein, *63*\,€.“ Wer hat recht? $30\,\%$ von *90*\,€ sind *27*\,€, der neue Preis beträgt also *63*\,€. Lena hat *30*\,€ abgezogen, also $30$ statt $30\,\%$. In diesem Kapitel lernst du, solche Situationen sicher zu lösen.

## Was bedeutet Prozent?

**Definition: Prozent**

„Prozent“ heißt „von Hundert“. $1\,\%$ ist der hundertste Teil: $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Prozentangaben machen Anteile vergleichbar: 15 von 60 Schülern und 20 von 80 Schülern sind beide $25\,\%$.

**Merke: Wichtige Anteile**

$50\,\% = \frac{1}{2}$, $25\,\% = \frac{1}{4}$, $75\,\% = \frac{3}{4}$, $10\,\% = \frac{1}{10}$, $20\,\% = \frac{1}{5}$, $5\,\% = \frac{1}{20}$.

## Die drei Grundgrößen

**Definition: Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz**

Der **Grundwert** $G$ ist das Ganze ($100\,\%$). Der **Prozentwert** $W$ ist der Teil vom Ganzen. Der **Prozentsatz** $p\,\%$ gibt den Anteil an.

**Regel: Grundformel**

$W = G \cdot \frac{p}{100}$. Daraus folgen $G = \frac{W}{p} \cdot 100$ und $p = \frac{W}{G} \cdot 100$.

## Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert berechnen

**Beispiel 1: Prozentwert**

**Berechne $20\,\%$ von *350*\,€.**

$W = 350 \cdot 0{,}20 = 70$, also *70\,€*. Mit Dreisatz: $100\,\%$ sind 350 €, $1\,\%$ sind 3,50 €, $20\,\%$ sind 70 €.

**Beispiel 2: Prozentsatz**

**In einer Klasse mit 25 Schülern haben 7 einen Hund. Wie viel Prozent sind das?**

$p = \frac{7}{25} \cdot 100 = 28$, also $28\,\%$.

**Beispiel 3: Grundwert**

**18 Schüler sind $30\,\%$ der Schule. Wie viele Schüler hat die Schule?**

$G = \frac{18}{30} \cdot 100 = 60$. Die Schule hat 60 Schüler.

## Drei Lösungswege

**So gehst du vor: Drei Wege zur Lösung**

1. **Dreisatz:** Rechne von $100\,\%$ auf $1\,\%$ und dann auf den gesuchten Prozentsatz.
2. **Formel:** $W = G \cdot \frac{p}{100}$, nach der gesuchten Größe umgestellt.
3. **Operator:** Multipliziere mit dem Faktor, der dem Prozentsatz entspricht, zum Beispiel mit 0,35 für $35\,\%$.

**Beispiel 4: Alle drei Wege**

**Berechne $35\,\%$ von *280\,€* auf allen drei Wegen.**

Dreisatz: $1\,\%$ sind 2,80 €, $35\,\%$ sind $35 \cdot 2{,}8 = 98$ €. Formel: $W = 280 \cdot \frac{35}{100} = 98$. Operator: $280 \cdot 0{,}35 = 98$. Immer 98 €.

## Prozentuale Änderung

**Regel: Wachstumsfaktor**

Bei einer Erhöhung um $p\,\%$ ist der neue Wert $G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Bei einer Verminderung um $p\,\%$ ist er $G \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

**Beispiel 5: Rabatt**

**Eine Jacke kostet 80 € und wird um $15\,\%$ reduziert.**

Neuer Preis: $80 \cdot 0{,}85 = 68$. Sie kostet 68 €.

**Beispiel 6: Mehrwertsteuer**

**Ein Fahrrad kostet netto 400 €. Wie hoch ist der Preis mit $19\,\%$ Mehrwertsteuer?**

$400 \cdot 1{,}19 = 476$. Der Bruttopreis beträgt 476 €.

**Beispiel 7: Alter Grundwert**

**Ein Pullover kostet nach einer Erhöhung von $25\,\%$ genau 50 €. Wie viel kostete er vorher?**

$G \cdot 1{,}25 = 50$, also $G = \frac{50}{1{,}25} = 40$. Er kostete vorher 40 €.

**So gehst du vor: Änderung in Prozent bestimmen**

1. Berechne den Unterschied (Differenz).
2. Teile die Differenz durch den *alten* Wert.
3. Multipliziere mit 100.

**Beispiel 8: Preissteigerung**

**Ein Preis steigt von 40 € auf 46 €. Um wie viel Prozent?**

Differenz 6 €. $p = \frac{6}{40} \cdot 100 = 15$. Der Preis stieg um $15\,\%$.

## Prozentpunkte und Vorsicht

**Definition: Prozentpunkte**

Steigt ein Anteil von $20\,\%$ auf $25\,\%$, so ist das ein Anstieg um 5 **Prozentpunkte**, aber um $25\,\%$ bezogen auf den alten Wert.

**Beispiel 9: Erst erhöhen, dann senken**

**Ein Preis wird um $10\,\%$ erhöht und dann um $10\,\%$ gesenkt. Ist er wieder derselbe?**

Nein: $1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$. Der Preis ist um $1\,\%$ niedriger. Ebenso gilt: Zweimal $25\,\%$ Rabatt sind $0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625$. Man zahlt $56{,}25\,\%$, nicht $50\,\%$.

**Hinweis**

Frage immer: Worauf bezieht sich der Prozentsatz? Prozente begegnen dir in Schlussverkäufen, Wahlergebnissen, Regenwahrscheinlichkeiten und Akkuanzeigen.

## Beispiel 10: Im Alltag (Handyvertrag)

**Ein Handytarif kostet *24\,€* im Monat. Nach einem Jahr steigt der Preis um $7{,}5\,\%$. Wie viel zahlt man danach im Jahr?**

Neuer Monatspreis: *24\cdot1{,}075=25{,}80\,€*. Im Jahr: *12\cdot25{,}80=309{,}60\,€*. Vorher waren es *288\,€*, die Mehrkosten betragen *21{,}60\,€*.

## Beispiel 11: Prozentsatz aus einer Tabelle

**In der Klasse 7a ($24$ Kinder) kommen $9$ mit dem Rad, $6$ mit dem Bus, $3$ mit dem Roller und $6$ zu Fuß. Gib die Anteile in Prozent an.**

Rad $\frac{9}{24} = 37{,}5\,\%$; Bus $\frac{6}{24} = 25\,\%$; Roller $\frac{3}{24} = 12{,}5\,\%$; zu Fuß $25\,\%$. Probe: $37{,}5 + 25 + 12{,}5 + 25 = 100\,\%$.

## Typische Fehler

(1) Prozentsatz und Prozentwert verwechseln. (2) Bei „$20\,\%$ mehr, dann $20\,\%$ weniger“ denken, man sei wieder beim Start. (3) Den Prozentsatz auf den neuen statt auf den alten Wert beziehen. (4) $8\,\%$ als $0{,}8$ schreiben statt $0{,}08$.

## Wusstest du?

Das Wort „Prozent“ kommt vom lateinischen „pro centum“, also „für hundert“. Schon die alten Römer berechneten Abgaben in Hundertsteln. In Deutschland gilt die Mehrwertsteuer in dieser Form seit 1968; heute sind es meist $19\,\%$, für Lebensmittel und Bücher $7\,\%$.

## Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Prozent heißt von Hundert: $1\,\% = \frac{1}{100}$.
- Grundwert $G$, Prozentwert $W$, Prozentsatz $p\,\%$; $W = G \cdot \frac{p}{100}$.
- Erhöhung um $p\,\%$: mal $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; Senkung: mal $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.
- Prozentuale Änderung bezieht sich immer auf den alten Wert.
- Prozentpunkte sind die Differenz zweier Prozentsätze.
- Mehrwertsteuer und Rabatt über Wachstumsfaktoren berechnen.

## Achtung

Beziehe den Prozentsatz auf den alten Wert, nicht auf den neuen. Bei einer Erhöhung musst du den Prozentwert zum Grundwert addieren. Prozentpunkte und Prozent sind verschieden. Umrechnen: $5\,\% = 0{,}05$, nicht 0,5.

# Vertiefung: Prozentrechnung im Alltag

## Einstieg: Wer hat besser getroffen?

Emil hat beim Basketball von 20 Würfen 12 versenkt, Paula von 25 Würfen 14. Wer ist die bessere Werferin oder der bessere Werfer? Die absoluten Zahlen helfen nicht weiter, weil beide unterschiedlich oft geworfen haben. Man muss die Anteile vergleichen: Emil trifft $\frac{12}{20} = \frac{60}{100}$, Paula $\frac{14}{25} = \frac{56}{100}$. Wenn man beide Brüche auf den Nenner 100 bringt, sieht man sofort: Emil trifft 60 von 100, Paula 56 von 100. Genau das ist die Idee der Prozentrechnung: Anteile werden auf die gemeinsame Vergleichsgröße 100 umgerechnet, damit man sie vergleichen kann.

## Merke: Prozentrechnung ist Dreisatz

Jede Grundaufgabe der Prozentrechnung kannst du auch mit dem Dreisatz lösen, weil Prozentsatz und Prozentwert proportional zueinander sind. Bei einem Grundwert von *240\,€* gehören zu $100\,\%$ genau *240\,€*, zu $1\,\%$ gehören *2{,}40\,€* und zu $15\,\%$ gehören *15\cdot2{,}40=36\,€*. Der Dreisatz geht also immer über den Zwischenschritt „1 %“. Dieser Weg ist besonders verständlich und eignet sich gut, wenn du dir bei der Formel unsicher bist.

## So gehst du vor: Welche Größe ist gesucht?

1. Lies die Aufgabe und markiere die drei Größen: Das Ganze ist der Grundwert $G$, der Teil ist der Prozentwert $W$, die Angabe mit dem Zeichen % ist der Prozentsatz $p\,\%$.
2. Prüfe, welche zwei Größen gegeben sind und welche fehlt.
3. Gesucht $W$: rechne $W = G \cdot \frac{p}{100}$. Gesucht $p\,\%$: rechne $\frac{W}{G}$. Gesucht $G$: rechne $G = W : \frac{p}{100}$.
4. Mache eine Überschlagsrechnung: Der Prozentwert ist kleiner als der Grundwert, solange der Prozentsatz unter 100 % liegt.
5. Formuliere einen Antwortsatz mit Einheit.

## Beispiel 12: Grundwert im Alltag

**Bei einer Umfrage gaben 84 Jugendliche an, täglich Sport zu treiben. Das sind 35 % aller Befragten. Wie viele Jugendliche wurden befragt?**

Gegeben sind der Prozentwert $W = 84$ und der Prozentsatz $35\,\%$. Gesucht ist der Grundwert. Mit dem Dreisatz: $35\,\%$ entsprechen 84 Personen, also entspricht $1\,\%$ genau $84 : 35 = 2{,}4$ Personen, und $100\,\%$ entsprechen $240$ Personen. Mit der Formel: $G = 84 : 0{,}35 = 240$. Probe: $240 \cdot 0{,}35 = 84$. Es wurden 240 Jugendliche befragt.

## Beispiel 13: Zwei Änderungen nacheinander

**Ein Pullover kostet *50\,€*. Er wird zuerst um $20\,\%$ reduziert und an der Kasse**

**gibt es weitere $10\,\%$. Wie viel kostet er?**

Viele rechnen $20\,\% + 10\,\% = 30\,\%$ Rabatt. Das ist falsch, denn der zweite Rabatt bezieht sich auf den bereits reduzierten Preis. Richtig ist die Multiplikation der Faktoren: *50\cdot0{,}8\cdot0{,}9=50\cdot0{,}72=36\,€*. Insgesamt spart man $28\,\%$, nicht $30\,\%$. Merke: Aufeinanderfolgende prozentuale Änderungen werden multipliziert, nicht addiert.

## Achtung: Der Grundwert wechselt

Steigt ein Preis von *80\,€* auf *100\,€*, so ist das eine Erhöhung um $25\,\%$, denn der Grundwert ist der alte Preis *80\,€*. Fällt der Preis anschließend von *100\,€* zurück auf *80\,€*, so ist das eine Senkung um nur $20\,\%$, denn jetzt ist der Grundwert *100\,€*. Frage dich deshalb bei jeder Änderung: Wovon wird der Prozentsatz berechnet? Fast immer ist es der Wert **vor** der Änderung.

## Schon gewusst?

Das Wort „Prozent“ kommt aus dem Italienischen „per cento“, also „für hundert“. Kaufleute in Italien rechneten schon im 15. Jahrhundert Zinsen und Gewinne in Hundertsteln. Das Zeichen % entstand vermutlich aus einer Abkürzung von „cento“, die beim schnellen Schreiben immer mehr verkürzt wurde. Verwandte Zeichen sind das Promille ‰ für Tausendstel, das zum Beispiel bei der Blutalkoholkonzentration verwendet wird, und die Angabe „ppm“ (Teile pro Million) in der Chemie.

## Beispiel 14: Prozentpunkte oder Prozent?

**Der Anteil der Radfahrer unter den Schülern stieg von 20 % auf 25 %. Beschreibe die Änderung.**

Die Differenz der Prozentsätze beträgt $25 - 20 = 5$ Prozentpunkte. Bezogen auf den alten Anteil ist die Zunahme aber $\frac{5}{20} = 25\,\%$. Beide Aussagen sind richtig, aber sie bedeuten etwas anderes. In Zeitungen werden die Begriffe oft verwechselt. Achte deshalb genau darauf, ob von Prozentpunkten oder von Prozent die Rede ist.

## Beispiel 15: Prozentsatz über 100 %

**Ein Verein hatte 160 Mitglieder, heute sind es 200. Wie viel Prozent der früheren Mitgliederzahl sind das?**

Der Grundwert ist die alte Zahl 160. Es gilt $\frac{200}{160} = 1{,}25 = 125\,\%$. Der Verein hat also $125\,\%$ seiner früheren Größe, das bedeutet eine Zunahme um $25\,\%$. Prozentsätze über $100\,\%$ sind kein Fehler. Sie zeigen nur, dass der Prozentwert größer als der Grundwert ist.

## Ottos Tipp

Zeichne bei Prozentaufgaben einen Doppelstreifen mit $100\,\%$ oben und dem

Grundwert unten. Dann erkennst du sofort, was gegeben und was gesucht ist. Prüfe die Plausibilität: Ein Rabatt macht den Preis kleiner, ein Zuschlag größer.