Lernzettel - Proportionale und antiproportionale Zuordnungen

Klasse: Klasse 7

Mehr Äpfel kosten mehr Geld, mehr Arbeiter brauchen weniger Zeit. Hier lernst du, proportionale und antiproportionale Zuordnungen zu erkennen, darzustellen und mit dem Dreisatz zu berechnen.

Einstieg: Eis für die Klasse

Eine Kugel Eis kostet $1{,}40\,€$. Zwei Kugeln kosten $2{,}80\,€$, drei Kugeln $4{,}20\,€$. Verdoppelst du die Anzahl, verdoppelt sich der Preis. Anders ist es bei der Fahrzeit: Fährst du doppelt so schnell, brauchst du nur die halbe Zeit. Beide Beispiele sind Zuordnungen, aber sie verhalten sich verschieden. Wie du solche Zusammenhänge erkennst, darstellst und berechnest, lernst du hier.

Zuordnungen

Definition: Zuordnung

Eine **Zuordnung** ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer anderen Größe zu, zum Beispiel jeder Menge Äpfel ihren Preis. Man stellt sie in einer **Wertetabelle**, als **Graph** im Koordinatensystem oder mit einer **Zuordnungsvorschrift** dar.

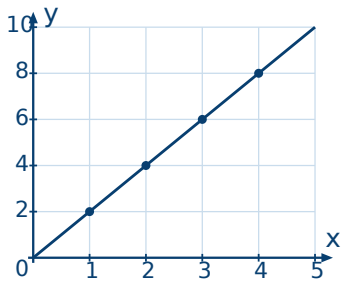
Proportionale Zuordnungen

Definition: proportional

Eine Zuordnung heißt **proportional**, wenn zum Doppelten, Dreifachen, Halben der einen Größe auch das Doppelte, Dreifache, Halbe der anderen gehört. Der Quotient $\frac{y}{x}$ ist dann immer gleich (**Quotientengleichheit**). Diese Zahl heißt **Proportionalitätsfaktor** k.

Regel: Proportional

Zuordnungsvorschrift: $y = k \cdot x$. Der Graph ist eine Halbgerade durch den Ursprung $(0 \mid 0)$.



Beispiel 1: Äpfel

3 kg Äpfel kosten 7,50 €. Wie viel kosten 5 kg?

Quotient: $7{,}5 : 3 = 2{,}5$, also $k=2{,}5\,€/\mathrm{kg}$. Vorschrift: $y = 2{,}5x$. Für 5 kg: $y = 12{,}5$, also 12,50 €.

Beispiel 2: Wasserhahn

Ein Wasserhahn füllt 12 Liter in 3 Minuten. Wie viel Wasser fließt in 10 Minuten?

Pro Minute fließen $12 : 3 = 4$ Liter. In 10 Minuten sind es $10 \cdot 4 = 40$ Liter. Die Zuordnung ist proportional mit $k = 4$ Liter pro Minute.

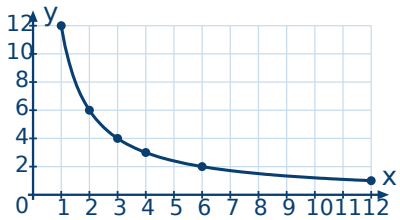
Antiproportionale Zuordnungen

Definition: antiproportional

Eine Zuordnung heißt **antiproportional**, wenn zum Doppelten der einen Größe die Hälfte der anderen gehört, zum Dreifachen ein Drittel usw. Das Produkt $x \cdot y$ ist dann immer gleich (**Produktgleichheit**).

Regel: Antiproportional

Zuordnungsvorschrift: $y = \frac{k}{x}$. Der Graph ist eine **Hyperbel** und schneidet keine Achse.



Beispiel 3: Dach

4 Arbeiter brauchen für ein Dach 15 Tage. Wie lange brauchen 6 Arbeiter?

Produkt: $4 \cdot 15 = 60$ Arbeitertage. Für 6 Arbeiter: $60 : 6 = 10$ Tage.

Beispiel 4: Katzenfutter

5 Katzen fressen einen Sack Futter in 12 Tagen. Wie lange reicht er für 3 Katzen?

$5 \cdot 12 = 60$ Katzentage, $60 : 3 = 20$ Tage.

Der Dreisatz

So gehst du vor: Dreisatz

1. **Bedingung:** Schreibe auf, was gegeben ist.
2. **Einheit:** Rechne auf 1 zurück. Proportional: teilen. Antiproportional: multiplizieren.
3. **Vielfaches:** Rechne auf die gesuchte Größe hoch. Proportional: multiplizieren. Antiproportional: teilen.

Beispiel 5: Proportional

5 Hefte kosten 4,00 €. Wie viel kosten 8 Hefte?

5 Hefte: 4,00 €. 1 Heft: $4 : 5 = 0{,}80$ €. 8 Hefte: $8 \cdot 0{,}8 = 6{,}40$ €.

Beispiel 6: Antiproportional

6 Pumpen leeren ein Becken in 8 Stunden. Wie lange brauchen 4 Pumpen?

6 Pumpen: 8 h. 1 Pumpe: $6 \cdot 8 = 48$ h. 4 Pumpen: $48 : 4 = 12$ h.

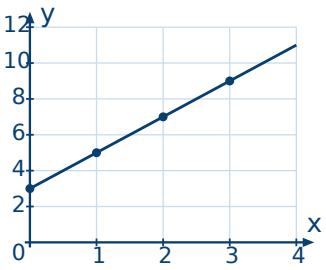
Unterscheiden

Regel: Unterscheiden

Prüfe, was passiert, wenn sich die erste Größe verdoppelt. Verdoppelt sich die zweite ebenfalls, ist die Zuordnung proportional. Halbiert sie sich, ist sie antiproportional. Passiert etwas anderes, ist sie weder noch.

Hinweis

Weder noch ist zum Beispiel das Alter eines Kindes und seine Körpergröße. Auch Fahrpreise mit einer Grundgebühr sind nicht proportional, weil der Graph nicht durch den Ursprung geht.



Beispiel 7: Tabelle prüfen

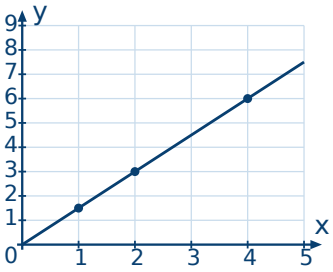
Prüfe: $x = 2, 4, 6$ mit $y = 5, 10, 15$ und $x = 1, 2, 4$ mit $y = 12, 6, 3$.

Erste Tabelle: $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = 2{,}5$, gleiche Quotienten, also proportional mit $k = 2{,}5$.
Zweite Tabelle: Produkte 12, 12, 12, also antiproportional mit $k = 12$.

Graphen zeichnen und lesen

So gehst du vor: Graph zeichnen

1. Trage die Wertepaare als Punkte in ein Koordinatensystem ein.
2. Proportional: Die Punkte liegen auf einer Geraden durch den Ursprung. Je größer k, desto steiler die Gerade.
3. Antiproportional: Verbinde die Punkte durch eine glatte Kurve, nie durch gerade Strecken.
4. Lies Zwischenwerte am Graphen ab, zum Beispiel den Preis für 2,5 kg.



Hinweis

Ein Rezept lässt sich gut proportional umrechnen, bei Gewürzen und Backzeit stößt das Modell aber an Grenzen. Prüfe das Ergebnis immer am Sachzusammenhang.

Beispiel 9: Im Alltag (Handwerker)

Vier Handwerker brauchen 9 Tage für eine Renovierung. Wie lange brauchen sechs Handwerker?

Antiproportional: Produkt $4 \cdot 9 = 36$ Handwerkertage. Mit 6 Handwerkern: $36 : 6 = 6$ Tage. Probe: Mehr Handwerker, weniger Zeit. Das passt.

Beispiel 10: Proportionalität prüfen

Ist die Zuordnung $x = 2, 4, 6$ und $y = 5, 9, 13$ proportional?

Quotienten: $\frac{5}{2} = 2{,}5$, $\frac{9}{4} = 2{,}25$, $\frac{13}{6} \approx 2{,}17$. Die Quotienten sind verschieden, also ist die Zuordnung nicht proportional. Auch nicht antiproportional, denn die Produkte 10, 36, 78 sind ebenfalls verschieden.

Beispiel 11: Graph lesen

Ein Graph geht durch den Ursprung und durch den Punkt $(4 \mid 10)$. Welche Werte gehören zu $x = 6$ und $y = 2{,}5$?

Der Faktor ist $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Zu $x = 6$ gehört $y = 15$. Zu $y = 2{,}5$ gehört $x = 1$.

Typische Fehler

(1) Jede Zuordnung „je mehr, desto mehr“ für proportional halten. Beispiel: Alter und Körpergröße. (2) Bei antiproportionalen Zuordnungen mit dem Quotienten statt dem Produkt rechnen. (3) Den Graph einer antiproportionalen Zuordnung als Gerade zeichnen. (4) Einheiten nicht beachten: g und kg mischen.

Wusstest du?

Der Dreisatz ist uralt: Schon die Händler im alten Indien und in Arabien rechneten damit. Man nannte ihn früher „Regel de Tri“. Kartenmacher nutzen proportionale Zuordnungen: Der Maßstab verkleinert alle Strecken mit demselben Faktor.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Proportional: Quotient $\frac{y}{x} = k$ ist konstant, $y = k \cdot x$, Graph Gerade durch den Ursprung.
- Antiproportional: Produkt $x \cdot y = k$ ist konstant, $y = \frac{k}{x}$, Graph Hyperbel.
- Dreisatz: Bedingung, Einheit, Vielfaches.
- Antiproportional: erst multiplizieren (Einheit), dann teilen.
- Wertetabelle, Graph und Vorschrift beschreiben dieselbe Zuordnung.
- Nicht jede Zuordnung ist proportional (zum Beispiel Preis mit Grundgebühr).

Achtung

Nicht jede Zuordnung, bei der „mehr“ zu „mehr“ führt, ist proportional. Entscheidend ist die Gleichheit der Quotienten. Beim antiproportionalen Dreisatz wird auf die Einheit multipliziert: 1 Pumpe braucht mehr Zeit, nicht weniger. Verbinde antiproportionale Punkte nicht mit Strecken. Vergiss die Einheiten nicht.

Vertiefung: Zuordnungen erkennen und sicher rechnen

Einstieg: Die Party-Planung

Für eine Klassenparty kauft Mia Saft ein. Eine Flasche kostet *1{,}20\,€*. Für zwei Flaschen zahlt sie *2{,}40\,€*, für zehn Flaschen *12\,€*. Je mehr Flaschen, desto mehr muss sie bezahlen, und zwar im gleichen Verhältnis. Gleichzeitig teilt sie eine Pizza mit 12 Stücken auf. Sind sie zu zweit, bekommt jeder 6 Stücke, zu dritt nur noch 4 und zu sechst nur 2. Hier gilt das Gegenteil: Je mehr Personen, desto weniger Stücke für jeden. Diese beiden Grundmuster, „je mehr, desto mehr“ und „je mehr, desto weniger“, begegnen dir im Alltag ständig. In der Mathematik heißen sie proportional und antiproportional, wenn sie ganz bestimmte Regeln erfüllen.

Merke: Quotientengleichheit und Produktgleichheit

Bei einer **proportionalen** Zuordnung ist der Quotient $\frac{y}{x}$ für alle Wertepaare gleich. Dieser feste Wert heißt Proportionalitätsfaktor k, und es gilt $y = k \cdot x$. Bei einer **antiproportionalen** Zuordnung ist das Produkt $x \cdot y$ für alle Wertepaare gleich, und es gilt $y = \frac{c}{x}$. Diese Tests sind die sicherste Methode, um eine Tabelle zu prüfen. Ein „je mehr, desto mehr“ allein reicht nicht aus: Auch die Körpergröße wächst mit dem Alter, ohne dass die Zuordnung proportional ist.

So gehst du vor: Eine Tabelle untersuchen

1. Berechne für jedes Wertepaar den Quotienten $\frac{y}{x}$. Sind alle Quotienten gleich, ist die Zuordnung proportional.
2. Sind die Quotienten verschieden, berechne die Produkte $x \cdot y$. Sind alle Produkte gleich, ist die Zuordnung antiproportional.
3. Trifft beides nicht zu, ist die Zuordnung weder proportional noch antiproportional.
4. Gib die Zuordnungsvorschrift an, also $y = k \cdot x$ oder $y = \frac{c}{x}$, und nutze sie, um fehlende Werte zu berechnen.

Beispiel 12: Eine Tabelle prüfen

Ist die Zuordnung x: 2, 4, 5, 10 und y: 15, 7,5, 6, 3 proportional oder antiproportional?

Die Quotienten sind $7{,}5$, $1{,}875$, $1{,}2$ und $0{,}3$. Sie sind verschieden, also ist die Zuordnung nicht proportional. Die Produkte sind $2 \cdot 15 = 30$, $4 \cdot 7{,}5 = 30$, $5 \cdot 6 = 30$ und $10 \cdot 3 = 30$. Sie sind alle gleich. Die Zuordnung ist also antiproportional mit $y = \frac{30}{x}$. Für $x = 8$ ergibt sich zum Beispiel $y = 30 : 8 = 3{,}75$.

Beispiel 13: Doppelter Dreisatz

Vier Pferde fressen in 6 Tagen 120 kg Heu. Wie viel fressen 5 Pferde in 9

Tagen?

Hier hängt die Menge von zwei Größen ab. Rechne zuerst auf ein Pferd und einen Tag zurück: $120 : (4 \cdot 6) = 5\,\text{kg}$. Dann rechnest du hoch: $5 \cdot 5 \cdot 9 = 225\,\text{kg}$. Die Heumenge ist sowohl zur Anzahl der Pferde als auch zur Anzahl der Tage proportional. Diesen Rechenweg nennt man doppelten oder zusammengesetzten Dreisatz.

Achtung: Nicht jede Zuordnung ist proportional

Ein Taxi kostet *4*\,€ Grundgebühr und *2*\,€ pro Kilometer. Für 1 km zahlt man *6*\,€, für 2 km aber nur *8*\,€, nicht *12*\,€. Die Zuordnung wächst zwar, doch wegen der Grundgebühr ist sie nicht proportional. Ihr Graph ist eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht. Prüfe deshalb immer, ob bei $x = 0$ auch $y = 0$ herauskommt.

Schon gewusst?

Der Dreisatz war jahrhundertelang die wichtigste Rechenmethode der Kaufleute. Im 16. Jahrhundert schrieb der deutsche Rechenmeister Adam Ries seine berühmten Rechenbücher, in denen er die „Regel de tri“, also die Regel von den drei bekannten Zahlen, erklärte. Seine Bücher waren so verbreitet, dass man noch heute sagt: „Das macht nach Adam Riese …“, wenn man ein Rechenergebnis betonen will.

Hinweis: Zuordnungen im Koordinatensystem

Der Graph einer proportionalen Zuordnung ist immer eine Halbgerade, die im Ursprung beginnt. Der Graph einer antiproportionalen Zuordnung ist eine Kurve, die sich den Achsen nähert, sie aber nie berührt. Schon ein Blick auf den Graphen verrät also, welche Art von Zuordnung vorliegt.

Ottos Tipp

Frage dich vor dem Rechnen: „Wird das Ergebnis größer oder kleiner?“ Mehr Arbeiter bedeuten weniger Zeit, mehr Äpfel bedeuten mehr Geld. So erkennst du sofort, ob du multiplizieren oder dividieren musst.