Lösungen - Proportionale und antiproportionale Zuordnungen

Klasse: Klasse 7

Lösung zu Aufgabe 1

a) Bei einer proportionalen Zuordnung ist der Preis pro Kilogramm konstant. Man teilt den Preis durch die Menge: $k = 7{,}50 : 3 = 2{,}50\,€$ pro kg.

b) Jeder Preis ist Menge mal k: $1 \cdot 2{,}5 = 2{,}50\,€$; $2 \cdot 2{,}5 = 5{,}00\,€$; $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}50\,€$; $8 \cdot 2{,}5 = 20{,}00\,€$.

c) Die Zuordnungsvorschrift lautet $y = 2{,}5 \cdot x$ (x in kg, y in €).

Kontrolle: Für $x = 3$ ergibt sich wieder $7{,}50\,€$. Der Graph wäre eine Halbgerade durch den Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Proportional: Doppelt so viele Hefte kosten doppelt so viel, der Quotient Preis durch Anzahl ist immer $0{,}80\,€$.

b) Antiproportional: Bei doppelter Geschwindigkeit halbiert sich die Fahrzeit, denn $v \cdot t = 120$ bleibt konstant.

c) Weder noch: Kinder wachsen unregelmäßig, mal schneller, mal langsamer, und ab einem Alter gar nicht mehr.

d) Antiproportional, wenn alle gleich schnell arbeiten: Doppelt so viele Arbeiter brauchen die halbe Zeit.

e) Proportional: $U = 4a$, der Faktor ist 4.

Lösung zu Aufgabe 3

Beim Dreisatz rechnet man zuerst auf eine Einheit zurück und dann auf die gesuchte Menge hoch.

a) 5 Hefte kosten 4 €, also kostet 1 Heft $4 : 5 = 0{,}80\,€$. 12 Hefte kosten $12 \cdot 0{,}80 = 9{,}60\,€$.

b) Man teilt den Betrag durch den Preis pro Heft: $7{,}20 : 0{,}80 = 9$ Hefte.

c) 1 Bleistift kostet $6 : 8 = 0{,}75\,€$, 20 Stifte kosten $20 \cdot 0{,}75 = 15{,}00\,€$.

Antwort: 9,60 €; 9 Hefte; 15 €.

Lösung zu Aufgabe 4

Bei antiproportionalen Zuordnungen bleibt das Produkt aus Arbeitern und Tagen gleich. Es gibt die gesamte Arbeit in „Arbeitertagen“ an: $4 \cdot 6 = 24$.

a) 3 Arbeiter: $24 : 3 = 8$ Tage. Weniger Arbeiter brauchen länger.

b) 8 Arbeiter: $24 : 8 = 3$ Tage.

c) In 2 Tagen: $24 : 2 = 12$ Arbeiter.

Probe: $3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24$. Alle Produkte stimmen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Fläche eines Rechtecks ist Länge mal Breite. Daher gilt Breite $= 24$: Länge: $24 : 2 = 12$, $24 : 3 = 8$, $24 : 4 = 6$, $24 : 6 = 4$, $24 : 8 = 3$, $24 : 12 = 2$ (in cm).

b) In jeder Spalte ist das Produkt Länge mal Breite gleich 24. Die Zuordnung Länge → Breite ist deshalb antiproportional.

c) $24 : 5 = 4{,}8\,\mathrm{cm}$.

Antwort: Bei 5 cm Länge ist das Rechteck 4,8 cm breit.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Man liest einen gut ablesbaren Punkt ab: Nach 1 Stunde sind 80 km zurückgelegt. Die Geschwindigkeit beträgt also $80\,\mathrm{km/h}$.

b) $80 \cdot 2{,}5 = 200\,\mathrm{km}$.

c) $120 : 80 = 1{,}5$ Stunden, also 1 Stunde 30 Minuten.

d) $s = 80 \cdot t$. Weil das Auto gleichmäßig fährt, ist die Strecke proportional zur Zeit. Zu $t = 0$ gehört $s = 0$, deshalb beginnt der Graph im Ursprung und ist eine Halbgerade.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Preis pro Kilogramm: *9{,}60:1{,}5=6{,}40\,€*.

b) *2{,}5\cdot6{,}40=16{,}00\,€*. Für $400\,\mathrm{g} = 0{,}4\,\mathrm{kg}$: *0{,}4\cdot6{,}40=2{,}56\,€*.

c) $20 : 6{,}40 = 3{,}125\,\mathrm{kg}$, also gut 3,1 kg.

Wichtig ist bei b), die Gramm vorher in Kilogramm umzurechnen, weil der Preis pro Kilogramm angegeben ist. Antwort: Für 20 € bekommt man etwa 3,1 kg Kirschen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Preis = Liter mal *1{,}75\,€*: *10\cdot1{,}75=17{,}50\,€*; *20\cdot1{,}75=35{,}00\,€*; *35\cdot1{,}75=61{,}25\,€*; *45\cdot1{,}75=78{,}75\,€*.

b) $50 : 1{,}75 \approx 28{,}57$, also etwa $28{,}6$ Liter.

c) Literpreis = Gesamtpreis durch Liter: *66{,}60:36=1{,}85\,€*.

Antwort: Für 50 € bekommt man rund 28,6 Liter; im Fall c) ist der Literpreis um 10 Cent höher.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Brötchen und Bleche sind proportional: $5 \cdot 24 = 120$ Brötchen.

b) 40 Brötchen brauchen 1 kg Mehl, also 1 Brötchen $25\,\text{g}$. Für 150 Brötchen: $150 : 40 = 3{,}75\,\text{kg}$.

c) $300 : 24 = 12{,}5$. Ein halbes Blech muss trotzdem gebacken werden, also braucht man 13 Bleche.

d) 10 Bleche sind 240 Brötchen: $240 : 40 = 6\,\text{kg}$ Mehl.

Antwort: 120 Brötchen; 3,75 kg; 13 Bleche; 6 kg.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Stundenlohn: *63:6=10{,}50\,€*.

b) *15\cdot10{,}50=157{,}50\,€*.

c) $400 : 10{,}50 \approx 38{,}1$. Tim muss also etwas mehr als 38 Stunden, praktisch 39 Stunden arbeiten, um mindestens 400 € zu verdienen.

d) Lohn und Arbeitszeit sind proportional: doppelte Zeit, doppelter Lohn. Der Graph ist deshalb eine Halbgerade durch den Ursprung mit der Steigung 10,5.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Die Arbeit beträgt $3 \cdot 12 = 36$ „Malertage“. Daraus: 2 Maler $36 : 2 = 18$ Tage, 4 Maler 9 Tage, 6 Maler 6 Tage, 9 Maler 4 Tage.

b) In 4 Tagen: $36 : 4 = 9$ Maler.

c) Die Rechnung setzt voraus, dass alle Maler gleich schnell arbeiten und sich nicht gegenseitig behindern. In Wirklichkeit stehen sich viele Personen auf einem Gerüst eher im Weg, und es gibt Arbeiten, die man nicht aufteilen kann, etwa das Trocknen der Farbe. Das Ergebnis ist also nur eine Näherung.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Seiten pro Tag mal Tage ergibt immer 360 Seiten. Also: $360 : 20 = 18$, $360 : 30 = 12$, $360 : 45 = 8$, $360 : 60 = 6$ Tage.

b) $360 : 25 = 14{,}4$. Nach 14 Tagen fehlen noch 10 Seiten, also braucht Lena 15 Tage.

c) $360 : 10 = 36$ Seiten pro Tag.

Die Zuordnung Seiten pro Tag → Tage ist antiproportional, denn das Produkt ist konstant 360.

Lösung zu Aufgabe 13

Die Gesamtarbeit beträgt $2 \cdot 9 = 18$ „Pumpenstunden“.

a) Eine Pumpe allein braucht doppelt so lange: $18 : 1 = 18$ Stunden.

b) Drei Pumpen: $18 : 3 = 6$ Stunden.

c) In $4{,}5$ Stunden: $18 : 4{,}5 = 4$ Pumpen.

Die Zuordnung Anzahl der Pumpen → Zeit ist antiproportional. Probe: $1 \cdot 18 = 3 \cdot 6 = 4 \cdot 4{,}5 = 18$. Antwort: 18 h, 6 h und 4 Pumpen.

Lösung zu Aufgabe 14

Der Maßstab bedeutet: 1 cm auf der Karte entspricht 500 m, also $0{,}5\,\text{km}$. Karte und Wirklichkeit sind proportional.

a) $3{,}2 \cdot 0{,}5 = 1{,}6\,\text{km}$.

b) Rückwärts teilt man durch $0{,}5$: $12 : 0{,}5 = 24\,\text{cm}$.

c) $7{,}5 \cdot 0{,}5 = 3{,}75\,\text{km}$.

Antwort: 1,6 km; 24 cm; 3,75 km. Merke: Bei Maßstabsaufgaben rechnet man am besten zuerst aus, wie viel 1 cm in Wirklichkeit ist.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Der Vorrat reicht für $28 \cdot 10 = 280$ „Personentage“. Für 20 Personen: $280 : 20 = 14$ Tage. Für 35 Personen: $280 : 35 = 8$ Tage.

b) In 4 Tagen verbrauchen 28 Personen $4 \cdot 28 = 112$ Personentage. Rest: $280 - 112 = 168$. Für 20 Personen: $168 : 20 = 8{,}4$ Tage.

c) $168 : 12 = 14$ Personen.

d) Man nimmt an, dass jede Person jeden Tag gleich viel isst und nichts verdirbt.

Lösung zu Aufgabe 16

a) 1 kg reicht für $25\,\text{m}^2$: $120 : 25 = 4{,}8\,\text{kg}$.

b) 1 kg kostet *12{,}50:5=2{,}50\,€*, also *4{,}8\cdot2{,}50=12{,}00\,€*.

c) Fläche: $18 \cdot 14 = 252\,\text{m}^2$. Dünger: $252 : 25 = 10{,}08\,\text{kg}$.

d) Man kann nur ganze Säcke kaufen. Zwei Säcke (10 kg) reichen knapp nicht, also braucht man 3 Säcke mit 15 kg für *3\cdot12{,}50=37{,}50\,€*. Übrig: $15 - 10{,}08 = 4{,}92\,\text{kg}$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Zeit = Strecke durch Geschwindigkeit: $60 : 10 = 6$, $60 : 15 = 4$, $60 : 20 = 3$, $60 : 30 = 2$ Stunden.

b) In jeder Spalte ist $v \cdot t = 60$. Das Produkt ist konstant, also ist die Zuordnung antiproportional. Der Graph ist eine fallende Kurve (Hyperbel), die die Achsen nie berührt.

c) $60 : 25 = 2{,}4$ h. $0{,}4$ h sind $0{,}4 \cdot 60 = 24$ Minuten, also 2 h 24 min.

d) Höchstens 3 Stunden Fahrzeit: $v \geq 60 : 3 = 20\,\mathrm{km/h}$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Vorrat: $18 \cdot 25 = 450$ „Kuhtage“. Für 30 Kühe: $450 : 30 = 15$ Tage.

b) In 10 Tagen fressen 18 Kühe 180 Kuhtage. Rest: 270. Für 13 Kühe: $270 : 13 \approx 20{,}8$ Tage, also knapp 21 Tage.

c) $18 \cdot 22 = 396\,\mathrm{kg}$ pro Tag, Kosten *396\cdot0{,}28=110{,}88\,€*.

d) $450 \cdot 22 = 9900\,\mathrm{kg}$, also fast 10 Tonnen.

Antwort: 15 Tage; etwa 20,8 Tage; 110,88 € täglich; 9900 kg Futter.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Dollar = Euro mal $1{,}08$: $50 \cdot 1{,}08 = 54\,\$$; $120 \cdot 1{,}08 = 129{,}60\,\$$; $250 \cdot 1{,}08 = 270\,\$$.

b) Rückwärts teilt man: *200:1{,}08\approx185{,}19\,€*.

c) 4 Nächte kosten $4 \cdot 85 = 340\,\$$, in Euro *340:1{,}08\approx314{,}81\,€*.

d) Jeder Euro wird mit demselben Faktor 1,08 umgerechnet, deshalb ist die Zuordnung proportional. In Wirklichkeit ändern sich die Kurse täglich, und Banken verlangen beim Tausch oft Gebühren.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Erst auf eine Maschine und eine Stunde zurückrechnen: $960 : (6 \cdot 8) = 960 : 48 = 20$ Teile. Dann hochrechnen: $9 \cdot 5 \cdot 20 = 900$ Teile.

b) In 6 Stunden schafft eine Maschine $6 \cdot 20 = 120$ Teile. Für 1800 Teile: $1800 : 120 = 15$ Maschinen.

c) Bei fester Zeit gilt: mehr Maschinen, mehr Teile (proportional). Bei fester Stückzahl gilt: mehr Maschinen, weniger Zeit (antiproportional). Deshalb heißt dieses Verfahren doppelter Dreisatz.