Lernzettel - Lineare Gleichungen

Klasse: Klasse 7

Mit Gleichungen findest du unbekannte Größen. Hier lernst du die Äquivalenzumformungen, besondere Fälle, Bruchgleichungen und Textaufgaben.

Einstieg: Die Balkenwaage

Auf der linken Schale einer Waage liegen ein unbekanntes Gewicht x und 3 Würfel zu je 1 kg. Rechts liegen 8 solcher Würfel. Die Waage ist im Gleichgewicht. Nimmst du links und rechts je 3 Würfel weg, bleibt sie im Gleichgewicht, und es bleibt $x = 5$ kg übrig. Genau das macht eine Äquivalenzumformung: Man tut auf beiden Seiten dasselbe. Probiere es: Welches Gewicht ist x, wenn links x und 2 Würfel liegen und rechts 7 Würfel?

Was ist eine Gleichung?

Definition: Gleichung und Lösungsmenge

Eine **Gleichung** entsteht, wenn man zwei Terme mit einem Gleichheitszeichen verbindet, zum Beispiel $3x + 4 = 19$. Die Werte, für die sie wahr wird, bilden die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$. Bei $3x + 4 = 19$ gilt $x = 5$, denn $3 \cdot 5 + 4 = 19$. Man schreibt $\mathbb{L} = \{5\}$.

Merke: Waage

Eine Gleichung ist wie eine Waage im Gleichgewicht. Legt man auf beiden Seiten dasselbe dazu oder nimmt dasselbe weg, bleibt das Gleichgewicht erhalten.

Äquivalenzumformungen

Regel: Äquivalenzumformungen

Eine **Äquivalenzumformung** verändert die Lösungsmenge nicht. Erlaubt sind: auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren, beide Seiten mit derselben Zahl $\neq 0$ multiplizieren oder durch sie dividieren, und auf jeder Seite für sich Terme zusammenfassen oder ausmultiplizieren.

Hinweis

Die Umformung schreibt man rechts neben die Gleichung, zum Beispiel $\mid -4$ oder $\mid : 3$.

Lösungsverfahren

So gehst du vor: Lineare Gleichung lösen

1. Fasse auf jeder Seite zusammen und multipliziere Klammern aus.
2. Bringe alle Terme mit x auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere.
3. Teile durch den Faktor vor x.
4. Mache die Probe in der Ausgangsgleichung.

Beispiel 1: Zwei Schritte

Löse $3x + 4 = 19$.

$3x + 4 = 19 \;|\; -4$, also $3x = 15 \;|: 3$, also $x = 5$. Probe: $3 \cdot 5 + 4 = 19$. Wahr.

Beispiel 2: x auf beiden Seiten

Löse $5x - 7 = 2x + 8$.

$5x - 7 = 2x + 8 \;|\; -2x$, also $3x - 7 = 8 \;|\; +7$, also $3x = 15 \;|: 3$, also $x = 5$.

Beispiel 3: Mit Klammern

Löse $2(x + 3) - 4 = 3(x - 1)$.

Ausmultiplizieren: $2x + 6 - 4 = 3x - 3$, zusammenfassen: $2x + 2 = 3x - 3$. Mit $|\; -2x$: $2 = x - 3$. Mit $|\; +3$: $x = 5$.

Beispiel 4: Große Gleichung mit Probe

Löse $4(x - 2) + 3 = 2(x + 5) - 1$.

Ausmultiplizieren: $4x - 8 + 3 = 2x + 10 - 1$. Zusammenfassen: $4x - 5 = 2x + 9$. Mit $|\; -2x$: $2x - 5 = 9$. Mit $|\; +5$: $2x = 14$. Mit $|: 2$: $x = 7$. Probe: links $4 \cdot 5 + 3 = 23$, rechts $2 \cdot 12 - 1 = 23$. Wahr.

Hinweis

Die Probe ist ein fester Teil der Lösung. Setze die Zahl in beide Seiten der *ursprünglichen* Gleichung ein und berechne jede Seite getrennt. Stimmen links und rechts überein, ist die Lösung richtig. Sonst suche den Fehler Zeile für Zeile, meistens liegt er bei einem Vorzeichen.

Besondere Fälle

Regel: Wahre und falsche Aussagen

Ergibt sich eine **wahre Aussage** wie $5 = 5$, gilt die Gleichung für alle Zahlen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.
Ergibt sich eine **falsche Aussage** wie $3 = 7$, hat sie keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$.

Beispiel 5: Keine Lösung

Löse $2(x + 1) = 2x + 5$.

Es wird $2x + 2 = 2x + 5$, also $2 = 5$. Das ist falsch, es gibt keine Lösung.

Brüche in Gleichungen

So gehst du vor: Bruchgleichungen

1. Bestimme den Hauptnenner.
2. Multipliziere beide Seiten mit dem Hauptnenner.
3. Löse die entstehende Gleichung ohne Brüche.

Beispiel 6: Mit Hauptnenner

Löse $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

Hauptnenner 6: $3x + 2x = 60$, also $5x = 60$ und $x = 12$. Probe: $6 + 4 = 10$. Wahr.

Textaufgaben

So gehst du vor: Textaufgaben

1. Lies den Text genau.
2. Lege fest, was x bedeuten soll.
3. Stelle eine Gleichung auf.
4. Löse sie.
5. Schreibe einen Antwortsatz und prüfe am Text.

Beispiel 7: Alter

Lena ist 4 Jahre älter als ihr Bruder. Zusammen sind sie 26 Jahre alt. Wie alt sind beide?

x: Alter des Bruders, Lena: $x + 4$. $x + x + 4 = 26$, also $2x = 22$ und $x = 11$. Der Bruder ist 11, Lena ist 15 Jahre alt.

Beispiel 8: Taxi

Ein Taxi berechnet 3,50 € Grundpreis und 1,80 € pro Kilometer. Die Fahrt kostete 15,20 €. Wie viele Kilometer waren es?

$3{,}5 + 1{,}8x = 15{,}2 \;|\; -3{,}5$, also $1{,}8x = 11{,}7 \;|: 1{,}8$, also $x = 6{,}5$. Die Fahrt war 6,5 km lang.

Beispiel 10: Im Alltag (Taxifahrt)

Eine Taxifahrt kostet *3{,}50\,€* Grundpreis plus *1{,}80\,€* je Kilometer. Julia zahlt *21{,}50\,€*. Wie lang war die Fahrt?

Gleichung: $3{,}5 + 1{,}8x = 21{,}5 \;|\; -3{,}5$, also $1{,}8x = 18 \;|: 1{,}8$, also $x = 10$. Die Fahrt war 10 km lang. Probe: $3{,}5 + 18 = 21{,}5$.

Beispiel 11: Gleichung aus einer Geometrie-Aufgabe

Ein Rechteck ist 4 cm länger als breit und hat den Umfang 36 cm. Berechne die Seiten.

Breite x, Länge $x + 4$: $2(x + x + 4) = 36$, also $4x + 8 = 36$, $x = 7$. Das Rechteck ist 7 cm breit und 11 cm lang.

Beispiel 12: Textaufgabe in vier Schritten

Anna ist 5 Jahre älter als ihr Bruder Ben. Zusammen sind sie 27 Jahre alt.

1. Unbekannte: Ben ist x Jahre alt. 2. Gleichung: $x + (x + 5) = 27$. 3. Lösen: $2x = 22$, $x = 11$. 4. Antwort: Ben ist 11, Anna 16 Jahre alt. Probe: $11 + 16 = 27$.

Typische Fehler

(1) Beim Multiplizieren mit einer Klammer nur den ersten Summanden mal nehmen: $2(x + 3) = 2x + 6$, nicht $2x + 3$. (2) Beim Umstellen das Vorzeichen vergessen: Aus $+5$ wird -5 auf der anderen Seite. (3) Beim Teilen durch eine negative Zahl das Vorzeichen übersehen. (4) Die Probe nur in der umgeformten Gleichung machen, statt in der Ausgangsgleichung.

Wusstest du?

Das Gleichheitszeichen $=$ erfand der Waliser Robert Recorde im Jahr 1557. Er schrieb, es gebe nichts Gleicheres als zwei parallele Strecken gleicher Länge. Das Wort „Algebra“ stammt aus dem Titel eines Buches des Gelehrten al-Chwarizmi um das Jahr 820.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Gleichung verbindet zwei Terme mit $=$; ihre Lösungen bilden die Lösungsmenge.
- Äquivalenzumformungen: auf beiden Seiten dasselbe addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren (nicht mit 0).

- Erst zusammenfassen, dann x sammeln, dann durch den Koeffizienten teilen.
- Brüche beseitigt man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner.
- Wahre Aussage: alle Zahlen; falsche Aussage: keine Lösung.
- Textaufgaben: Variable festlegen, Gleichung, Lösung, Probe, Antwortsatz.

Achtung

Verändere immer beide Seiten: Aus $x + 3 = 7$ wird $x = 7 - 3$, nicht $7 + 3$. Beim Teilen muss jedes Glied geteilt werden: $4x + 8 = 20 \ \vert : 4$ ergibt $x + 2 = 5$, nicht $x + 8 = 5$. Beim Ausmultiplizieren mit Minus keine Vorzeichen vergessen. Lass die Probe nicht aus.

Vertiefung: Gleichungen verstehen und sicher lösen

Einstieg: Das Zahlenrätsel

Jonas sagt: „Ich denke mir eine Zahl, nehme sie mal 4 und ziehe 6 ab. Heraus kommt 30.“ Du kannst die Zahl durch Probieren finden: 8 ergibt 26, 9 ergibt 30. Treffer! Probieren ist aber mühsam, wenn die Lösung eine Kommazahl oder eine negative Zahl ist. Deshalb übersetzt man das Rätsel in eine Gleichung, $4x - 6 = 30$, und löst sie Schritt für Schritt rückwärts: Erst wird das Abziehen rückgängig gemacht ($+6$), dann das Multiplizieren ($: 4$). So erhält man $4x = 36$ und $x = 9$. Dieses Rückwärtsrechnen ist der Kern aller Lösungsverfahren für lineare Gleichungen.

Definition: lineare Gleichung

Eine Gleichung heißt **linear**, wenn die Variable nur in der ersten Potenz vorkommt, also kein x^2, kein x im Nenner und kein Produkt zweier Variablen auftritt. Beispiele sind $3x + 5 = 17$ oder $2(x - 1) = x + 4$. Jede lineare Gleichung lässt sich durch Umformen auf die Form $a \cdot x = b$ bringen. Ist $a \neq 0$, gibt es genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{b}{a}$.

Merke: Erlaubte und verbotene Umformungen

Erlaubt ist alles, was man auf **beiden Seiten gleich** macht: dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren, mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl teilen. Verboten ist das Multiplizieren mit null und das Teilen durch null, denn dabei geht die Information der Gleichung verloren. Außerdem darfst du niemals nur ein einzelnes Glied einer Seite verändern. Wer bei $2x + 6 = 10$ nur das $2x$ durch 2 teilt, erhält ein falsches Ergebnis.

Beispiel 9: Mit Dezimalzahlen

Löse $0{,}4x + 1{,}2 = 0{,}1x + 3$.

Dezimalzahlen sind lästig. Deshalb multiplizierst du zuerst beide Seiten mit 10 und erhältst $4x + 12 = x + 30$. Nun bringst du die x-Glieder nach links, indem du x subtrahierst: $3x + 12 = 30$. Dann subtrahierst du 12: $3x = 18$. Zum Schluss teilst du durch 3: $x = 6$. Probe in der Ausgangsgleichung: links $0{,}4 \cdot 6 + 1{,}2 = 3{,}6$, rechts $0{,}6 + 3 = 3{,}6$. Die Lösung stimmt.

So gehst du vor: Die Probe richtig machen

1. Setze die gefundene Zahl in die **Ausgangsgleichung** ein, nicht in eine umgeformte Zeile, denn dort könnte schon ein Fehler stecken.
2. Berechne die linke Seite und die rechte Seite getrennt.
3. Stimmen beide Werte überein, ist die Lösung richtig. Andernfalls suchst du Zeile für Zeile den Fehler.
4. Schreibe am Ende die Lösungsmenge auf, zum Beispiel $\mathbb{L} = \{6\}$.

Achtung: Teilen durch eine negative Zahl

Bei $-3x = 12$ teilst du durch -3 und erhältst $x = -4$. Viele vergessen das Minuszeichen und schreiben $x = 4$. Die Probe deckt den Fehler sofort auf: $-3 \cdot 4 = -12$ und nicht 12. Bei Gleichungen bleibt das Gleichheitszeichen beim Teilen durch eine negative Zahl unverändert. Erst bei Ungleichungen musst du das Zeichen umdrehen.

Schon gewusst?

Das Wort „Algebra“ stammt aus dem Titel eines Buches des persischen Gelehrten al-Chwarizmi aus dem 9. Jahrhundert. Darin beschreibt er zwei Grundoperationen zum Lösen von Gleichungen: „al-dschabr“ (Ergänzen, also ein abgezogenes Glied auf die andere Seite bringen) und „al-muqabala“ (Ausgleichen, also gleiche Glieder auf beiden Seiten wegnehmen). Genau diese Schritte machst du heute noch bei jeder Äquivalenzumformung. Aus seinem Namen wurde übrigens das Wort „Algorithmus“.

Beispiel 13: Lösung prüfen und deuten

Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit, sein Umfang beträgt $27\,\text{cm}$. Wie breit ist es?

Mit der Breite x ist die Länge $2x$, also gilt $2(x + 2x) = 27$ und damit $6x = 27$, $x = 4{,}5$. Das Rechteck ist $4{,}5\,\text{cm}$ breit und $9\,\text{cm}$ lang. Prüfe zum Schluss immer, ob die Lösung im Sachzusammenhang sinnvoll ist: Eine Länge darf nicht negativ sein, eine Personenzahl muss ganzzahlig sein.

Ottos Tipp

Löse Gleichungen in der Reihenfolge „erst aufräumen, dann umstellen“. Fasse zuerst jede Seite zusammen, bringe dann alle x auf eine Seite und alle Zahlen auf die

andere. Setze deine Lösung am Ende in die Ausgangsgleichung ein. Diese Probe dauert nur wenige Sekunden und gibt Sicherheit für die Klassenarbeit.