Lernzettel - Kongruenz und Dreieckskonstruktion

Klasse: Klasse 7

Wann sind zwei Dreiecke deckungsgleich? Mit den Kongruenzsätzen entscheidest du das mit wenigen Angaben. Du lernst auch, Dreiecke zu konstruieren.

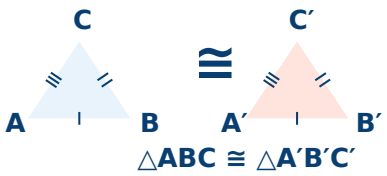
Einstieg: Der Kopierstempel

Ein Stempel in Form eines Dreiecks druckt immer wieder dasselbe Dreieck auf das Papier. Alle Abdrücke sind deckungsgleich: gleiche Seiten, gleiche Winkel. Nun die Frage: Wie viele Angaben muss man machen, damit jeder, der sie bekommt, genau dasselbe Dreieck zeichnet? Eine Seitenlänge reicht nicht, zwei Seitenlängen auch nicht. Drei Seitenlängen aber legen das Dreieck eindeutig fest. Die Kongruenzsätze sagen dir, welche Angaben genügen.

Kongruente Figuren

Definition: kongruent

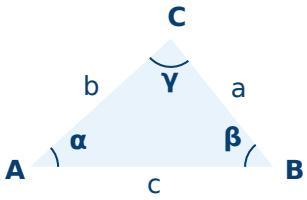
Zwei Figuren heißen **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie nach Verschieben, Drehen oder Spiegeln genau aufeinander passen. Dann sind alle zusammengehörigen Seiten gleich lang und alle zusammengehörigen Winkel gleich groß. Man schreibt $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Die Reihenfolge der Buchstaben zeigt, welche Punkte zusammengehören: A entspricht D, B entspricht E, C entspricht F.



Bezeichnungen im Dreieck

Definition: Bezeichnungen

Im Dreieck ABC liegt die Seite a gegenüber von A, b gegenüber von B und c gegenüber von C. Die Winkel heißen α (bei A), β (bei B) und γ (bei C). Die Winkelsumme beträgt $180°$.



Die Kongruenzsätze

Satz: Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in: **SSS** – allen drei Seiten. **SWS** – zwei Seiten und dem *eingeschlossenen* Winkel. **WSW** (bzw. **WWS**) – einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (bzw. zwei Winkeln, dann ist auch der dritte gleich). **SsW** – zwei Seiten und dem Winkel, der der *größeren* Seite gegenüberliegt.

Achtung

„Zwei Seiten und ein Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegt“ reicht nicht, denn dann gibt es oft zwei verschiedene Dreiecke. Auch „drei Winkel“ genügen nicht: Sie legen nur die Form fest, nicht die Größe (Ähnlichkeit).

Beispiel 1: SWS

Sind die Dreiecke mit $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 40^\circ$ und $a' = 5$, $b' = 7$, $\gamma' = 40^\circ$ kongruent?

Ja, nach SWS, denn der Winkel γ liegt zwischen a und b.

Beispiel 2: WSW

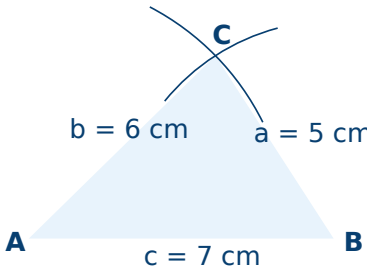
Dreieck 1 hat $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $c = 7$ cm. Dreieck 2 hat $\alpha = 50^\circ$, $\gamma = 70^\circ$ und $c = 7$ cm. Sind sie kongruent?

Im ersten Dreieck ist $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$, im zweiten ist $\beta = 60^\circ$. Beide stimmen in α, β und der Seite c überein, die zwischen α und β liegt. Nach WSW sind sie kongruent.

Dreiecke konstruieren

So gehst du vor: SSS konstruieren

1. Fertige eine Skizze an und markiere die gegebenen Stücke.
2. Zeichne die Seite c.
3. Schlage um A einen Kreisbogen mit Radius b und um B einen mit Radius a.
4. Der Schnittpunkt ist C.



Merke: Dreiecksungleichung

Die SSS-Konstruktion gelingt nur, wenn jede Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen. Seiten 3, 4 und 8 cm sind nicht konstruierbar, denn $3 + 4 = 7$.

So gehst du vor: SWS konstruieren

1. Zeichne die Seite c.
2. Trage in A den Winkel α an.
3. Markiere auf dem freien Schenkel die Länge b.
4. Verbinde C mit B.

So gehst du vor: WSW konstruieren

1. Zeichne die Seite c.
2. Trage in A den Winkel α und in B den Winkel β an.
3. Der Schnittpunkt der freien Schenkel ist C.

Beispiel 3: Dreieck mit SWS

Konstruiere $\triangle ABC$ mit $c = 6$ cm, $b = 5$ cm und $\alpha = 50°$.

Der Winkel α liegt zwischen b und c, also ist es ein SWS-Fall. Zeichne A und B mit 6 cm Abstand, trage bei A den Winkel 50° an, markiere auf dem Schenkel 5 cm und verbinde C mit B.

Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

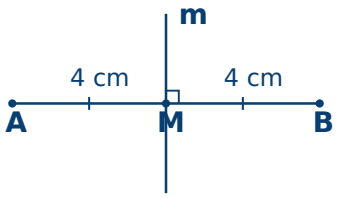
Definition: Mittelsenkrechte

Die **Mittelsenkrechte** einer Strecke AB steht senkrecht auf der Strecke und geht durch ihre Mitte. Jeder Punkt auf ihr hat von A und B denselben Abstand.

So gehst du vor: Mittelsenkrechte konstruieren

1. Schlage um A und B Kreisbögen mit gleichem Radius, größer als die halbe Strecke.

2. Verbinde die beiden Schnittpunkte der Bögen.



Definition: Winkelhalbierende

Die **Winkelhalbierende** teilt einen Winkel in zwei gleich große Teile. Jeder ihrer Punkte hat von beiden Schenkeln denselben Abstand.

So gehst du vor: Winkelhalbierende konstruieren

1. Schlage einen Kreisbogen um den Scheitel, der beide Schenkel schneidet.
2. Schlage um beide Schnittpunkte zwei gleich große Kreisbögen.
3. Die Gerade durch den Scheitel und den Schnittpunkt der Bögen halbiert den Winkel.

Satz: Besondere Punkte

Im Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten im **Umkreismittelpunkt** und die drei Winkelhalbierenden im **Inkreismittelpunkt**.

Beispiel 4: Im Alltag (Vermessung)

Zwei Dörfer A und B sind $8\,\text{km}$ entfernt. Eine Hütte C wird von A unter $50°$ und von B unter $60°$ angepeilt. Wie legt man die Lage von C auf der Karte fest?

Es ist ein WSW-Fall: Die Seite AB liegt zwischen den Winkeln. Auf der Karte ($1:100\,000$) zeichnet man $AB = 8\,\text{cm}$, trägt in A und B die Winkel an und schneidet die Schenkel: Der Schnittpunkt ist C.

Beispiel 5: Kongruenz zum Beweisen

Die Diagonale AC teilt ein Rechteck $ABCD$ in zwei Dreiecke. Zeige, dass sie kongruent sind.

$AB = CD$, $BC = DA$ (Gegenseiten des Rechtecks) und AC ist gemeinsam: SSS. Deshalb sind auch die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DCA$ gleich groß.

Beispiel 6: Winkelhalbierende konstruieren

Konstruiere die Winkelhalbierende eines Winkels mit dem Scheitel S.

Kreisbogen um S, er schneidet die Schenkel in P und Q. Dann Kreisbögen mit gleichem Radius um P und Q; der Schnittpunkt R liegt auf der Winkelhalbierenden. Gerade SR zeichnen.

Typische Fehler

(1) „SSW“ als Kongruenzsatz verwenden, ohne dass der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (2) Die Dreiecksungleichung mit „größer gleich“ prüfen: Bei $a + b = c$ entsteht kein Dreieck. (3) Winkel und Seiten beim Konstruieren verwechseln. (4) Beim Antragen des Winkels die falsche Skala am Geodreieck ablesen. (5) Die Zuordnung der Buchstaben bei $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ignorieren.

Wusstest du?

Die Kongruenzsätze stehen schon in den „Elementen“ des Euklid, geschrieben um das Jahr 300 v. Chr. Landvermesser nutzen sie noch heute: Die Triangulation, also das Netz aus Dreiecken, legte lange die Grundlage jeder Landkarte. Der Erfinder dieses Verfahrens für Landkarten, Gemma Frisius, lebte im 16. Jahrhundert.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Kongruente Figuren sind deckungsgleich: Seiten und Winkel stimmen überein.
- Kongruenzsätze: SSS, SWS, WSW, SsW.
- Winkelsumme im Dreieck: 180°.
- Dreiecksungleichung: Jede Seite ist kleiner als die Summe der anderen beiden.
- Mittelsenkrechte: senkrecht durch die Mitte, gleicher Abstand zu zwei Punkten.
- Winkelhalbierende teilt den Winkel; Schnittpunkt im Dreieck ist der Inkreismittelpunkt.

Achtung

Bei SWS muss der Winkel zwischen den gegebenen Seiten liegen. Prüfe vor SSS die Dreiecksungleichung. Stelle den Zirkel nicht zwischendurch neu ein. Radiere Konstruktionslinien nicht weg: Sie gehören zur Lösung.

Vertiefung: Kongruenzsätze verstehen und anwenden

Einstieg: Das Dreieck am Telefon beschreiben

Lea hat ein Dreieck gezeichnet und soll es ihrer Freundin am Telefon so beschreiben, dass diese genau dasselbe Dreieck zeichnen kann. Wie viele Angaben braucht sie? Eine Seitenlänge allein genügt sicher nicht. Zwei Seiten genügen auch nicht, denn der Winkel zwischen ihnen kann beliebig sein. Erst mit drei passenden Angaben, etwa drei

Seiten oder zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, ist das Dreieck eindeutig festgelegt. Die Kongruenzsätze sagen genau, welche drei Angaben ausreichen. Sie sind deshalb das Werkzeug für jede Dreieckskonstruktion.

Merke: Eindeutig konstruierbar

Ein Dreieck heißt **eindeutig konstruierbar**, wenn alle Dreiecke, die man aus den gegebenen Stücken zeichnen kann, zueinander kongruent sind. Genau das garantieren die Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW (bzw. SWW) und SsW. Sind die Angaben unvollständig, gibt es unendlich viele Lösungen. Sind sie widersprüchlich, etwa wenn die Dreiecksungleichung verletzt ist oder die Winkelsumme 180° überschreitet, gibt es gar keine Lösung. Beim Fall „Seite, Seite, Winkel gegenüber der kleineren Seite“ kann es zwei verschiedene Lösungen geben.

So gehst du vor: Eine Konstruktion planen

1. Fertige eine Planskizze an und markiere die gegebenen Stücke farbig.
2. Entscheide, welcher Kongruenzsatz passt. Achte darauf, ob der Winkel zwischen den Seiten liegt oder gegenüber.
3. Beginne mit einer gegebenen Seite als Grundseite und trage dann Winkel oder Kreisbögen an.
4. Beschrifte alle Punkte, Seiten und Winkel.
5. Schreibe eine kurze Konstruktionsbeschreibung und prüfe am Ende durch Messen, ob die gegebenen Größen stimmen.

Beispiel 7: Zwei Winkel und eine Seite, die nicht dazwischen liegt

Konstruiere ein Dreieck mit $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und $\beta = 70^\circ$.

Die Seite a liegt nicht zwischen α und β. Mit der Winkelsumme berechnest du zuerst den dritten Winkel: $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$. Jetzt liegt a zwischen β und γ, und du kannst nach WSW konstruieren: Zeichne $BC = 5\,\text{cm}$, trage in B den Winkel 70° und in C den Winkel 60° an. Der Schnittpunkt der freien Schenkel ist A. Diesen Trick nennt man manchmal auch Kongruenzsatz SWW.

Achtung: Kreisbögen weit genug zeichnen

Bei SSS-Konstruktionen zeichnet man die Kreisbögen oft zu kurz, sodass sie sich auf dem Papier nicht schneiden. Zeichne die Bögen großzügig auf der Seite der Grundseite, auf der der dritte Punkt liegen soll. Schneiden sie sich trotzdem nicht, ist vermutlich die Dreiecksungleichung verletzt. Dann gibt es kein Dreieck mit diesen Seitenlängen, und das solltest du als Ergebnis notieren.

Schon gewusst?

Bereits der griechische Mathematiker Euklid bewies um 300 v. Chr. in seinem Werk

„Die Elemente“ die Kongruenzsätze. Landvermesser nutzen sie bis heute: Beim sogenannten Triangulieren wird ein ganzes Land in Dreiecke eingeteilt. Misst man eine Seite genau und dazu die Winkel, lassen sich alle anderen Entfernungen berechnen, ohne sie abzulaufen. So entstanden schon vor über 200 Jahren erstaunlich genaue Landkarten.

Ottos Tipp

Fertige immer zuerst eine Planfigur an und markiere die gegebenen Stücke farbig. Dann erkennst du den Kongruenzsatz sofort und weißt, in welcher Reihenfolge du zeichnen musst. Arbeite mit einem spitzen Bleistift, denn kleine Ungenauigkeiten wachsen schnell.