Arbeitsblatt - Kongruenz und Dreieckskonstruktion

Klasse: Klasse 7 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Kongruente Dreiecke zuordnen

Es gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$. Im Dreieck ABC sind $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$, $CA = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 44^\circ$, $\beta = 57^\circ$, $\gamma = 79^\circ$.

Dreieck PQR	Wert
PQ	?
QR	?
RP	?
Winkel bei P	?
Winkel bei Q	?
Winkel bei R	?

a) Welche Punkte gehören zusammen?
b) Fülle die Tabelle aus.
c) Welche Aussage über Fläche und Umfang beider Dreiecke gilt?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Welcher Kongruenzsatz?

Ordne jeder Angabe den passenden Kongruenzsatz zu (SSS, SWS, WSW, SsW) oder entscheide, dass keiner passt.

a) a, b, c gegeben
b) a, c und der eingeschlossene Winkel β
c) c, α und β
d) b, c und der Winkel γ gegenüber der größeren Seite c ($c > b$)
e) α, β, γ gegeben

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Dreiecksungleichung

Ein Dreieck mit den Seiten a, b, c existiert nur, wenn jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden anderen. Prüfe, ob sich Dreiecke mit diesen Seitenlängen (in cm) konstruieren lassen.

a) 3, 4, 8
b) 5, 6, 10
c) 4, 4, 8
d) 7, 9, 15
e) 2, 2, 3

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Bezeichnungen im Dreieck

Im Dreieck ABC liegt die Seite a gegenüber von A, die Seite b gegenüber von B und die Seite c gegenüber von C. Der Winkel α liegt bei A, β bei B, γ bei C.

a) Welche Seite liegt zwischen den Winkeln α und β?
b) Welcher Winkel wird von den Seiten a und b eingeschlossen?
c) Gegeben sind $a = 5$, $b = 7$ und $\gamma = 40^\circ$. Welcher Kongruenzsatz kommt für die Konstruktion in Frage? Begründe.
d) Gegeben sind $a = 5$, $b = 7$ und $\alpha = 40^\circ$. Warum ist hier Vorsicht geboten?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Sind die Dreiecke kongruent?

Begründe jeweils mit einem Kongruenzsatz oder erkläre, warum man es nicht sagen kann.

a) $a = 5$, $c = 8$, $\beta = 55^\circ$ und $a_2 = 5$, $c_2 = 8$, $\beta_2 = 55^\circ$
b) Dreieck 1: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $c = 6$. Dreieck 2: $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 70^\circ$, $c = 6$.
c) Beide Dreiecke haben die Winkel 60°, 60°, 60°. Das eine hat die Seite 4, das andere 6.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – SWS konstruieren

Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 50^\circ$.

a) Welcher Kongruenzsatz liegt vor?
b) Beschreibe die Konstruktionsschritte in der richtigen Reihenfolge.
c) Miss die Seite a in deiner Zeichnung. Welcher Wert ergibt sich ungefähr?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – SSS konstruieren

Konstruiere das Dreieck mit $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$.

a) Prüfe, ob die Konstruktion möglich ist.
b) Beschreibe die Schritte mit Zirkel und Lineal.
c) Miss die drei Winkel. Welche Werte erwartest du, und welche Summe?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – WSW konstruieren

Konstruiere das Dreieck mit $c = 7\,\text{cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und $\beta = 60^\circ$.

a) Berechne γ.
b) Beschreibe die Konstruktion.
c) Miss a und b. Welche Werte erwartest du?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Zwei gleiche Beete

Familie Köhler möchte im Garten zwei dreieckige Beete anlegen, die genau gleich aussehen (kongruent). Für das erste Beet gelten zwei Seiten von $4\,\text{m}$ und $5\,\text{m}$ mit einem eingeschlossenen Winkel von 70°.

a) Welche Angaben braucht Familie Köhler für das zweite Beet?
b) Welcher Kongruenzsatz garantiert, dass beide Beete gleich sind?
c) Reicht es, nur die beiden Seitenlängen zu kennen? Begründe.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Fachwerk aus Balken

Eine Brücke wird aus dreieckigen Fachwerken gebaut. Zwei Dreiecke haben die Balkenlängen $3\,\text{m}$, $4\,\text{m}$ und $5\,\text{m}$.

a) Sind die beiden Dreiecke kongruent? Begründe.
b) Kann man aus Balken von $3\,\text{m}$, $4\,\text{m}$ und $8\,\text{m}$ ein Dreieck bauen?
c) Warum sind Dreiecke im Bauwesen stabil und Vierecke nicht?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Mittelsenkrechte

Auf dem Schulhof stehen zwei Bäume A und B im Abstand von $10\,\text{m}$. Eine Bank soll von beiden Bäumen gleich weit entfernt stehen.

a) Auf welcher Linie kann die Bank stehen? Wie konstruiert man sie?
b) Die Bank steht $13\,\text{m}$ von A entfernt. Wie weit ist sie von B entfernt?
c) Wie weit ist die Bank von jedem Baum entfernt, wenn sie genau zwischen den Bäumen auf der Strecke AB steht?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Bushaltestelle

Zwei Straßen schneiden sich unter einem Winkel von 60°. Die neue Bushaltestelle soll von beiden Straßen gleich weit entfernt sein.

a) Auf welcher Linie muss sie liegen?
b) Wie groß ist der Winkel zwischen dieser Linie und jeder Straße?
c) Wie groß wäre er bei einem Kreuzungswinkel von 110°?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Brunnen im Park

Im Park stehen drei Bäume A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Ein Brunnen soll von allen drei Bäumen gleich weit entfernt sein.

a) Welche Linien muss man konstruieren, und wo liegt der Brunnen?
b) Wie viele Mittelsenkrechten braucht man mindestens?
c) Was geschieht, wenn die drei Bäume auf einer Geraden stehen?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Muster kopieren

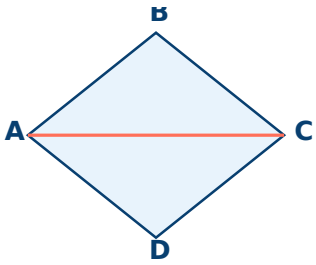
Eine Tischlerin soll drei gleiche dreieckige Holzplatten nach einem Muster schneiden. Am Muster misst sie die Seite $c = 24\,\text{cm}$ und die beiden anliegenden Winkel $\alpha = 40^\circ$ und $\beta = 75^\circ$.

a) Welcher Kongruenzsatz gilt hier?
b) Wie groß ist der dritte Winkel?
c) Reicht es, wenn sie stattdessen nur die drei Winkel misst? Begründe.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Raute und ihre Diagonale

Im Viereck $ABCD$ sind alle Seiten $5\,\text{cm}$ lang (Raute). Die Diagonale AC ist $6\,\text{cm}$ lang.



a) Zeige, dass die Dreiecke ABC und ADC kongruent sind.
b) Welche Winkel sind deshalb gleich groß?
c) Der Winkel bei B beträgt etwa 74°. Berechne die Winkel bei A, C und D näherungsweise.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Wanderweg und Dreiecksungleichung

Die Hütte H, der Gipfel G und der See S bilden ein Dreieck. Der Weg HG ist $3{,}2\,\text{km}$ lang, der Weg GS ist $4{,}5\,\text{km}$ lang.

a) Zwischen welchen Werten muss die Länge HS liegen?
b) Ist $HS = 1\,\text{km}$ möglich? Und $HS = 8\,\text{km}$?
c) Welche ganzzahligen Längen (in km) sind möglich?
d) Erkläre mit der Dreiecksungleichung, warum der direkte Weg nie länger ist als ein Umweg.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Vermessung eines Baums

Ein Vermesser kann nicht ans andere Ufer. Er misst die Strecke $AB = 120\,\text{m}$ am Ufer und von dort den Baum C am anderen Ufer unter den Winkeln $\alpha = 62^\circ$ und $\beta = 48^\circ$.

a) Berechne γ.
b) Beschreibe die Konstruktion im Maßstab $1 : 2\,000$ (AB ist dann $6\,\text{cm}$ lang).
c) Welche Entfernungen AC und BC erwartet er? Rechne die Zeichnungslängen in Meter um.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Wenn SsW zweideutig wird

Mario soll ein Dreieck mit $b = 6\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40^\circ$ konstruieren. Der Winkel β liegt der kürzeren Seite b gegenüber.

a) Zeichne $AB = 8\,\text{cm}$ und trage in B den Winkel 40° an. Beschreibe, wie man C findet (Kreisbogen um A mit Radius $6\,\text{cm}$).
b) Wie viele verschiedene Dreiecke ergeben sich?
c) Berechne die Winkel γ der beiden Lösungen näherungsweise.
d) Wie viele Dreiecke gibt es bei $a = 6\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ und $\gamma = 40^\circ$? Der Winkel liegt dann der größeren Seite gegenüber.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Dreieckige Wandfliesen

Eine Wand von $2{,}2\,\text{m}^2$ soll mit gleichseitigen dreieckigen Fliesen (Seitenlänge $20\,\text{cm}$, Höhe $17{,}3\,\text{cm}$) belegt werden. Alle Fliesen sind kongruent.

a) Wie groß ist jeder Winkel einer Fliese, und warum passen sechs Fliesen lückenlos um einen Punkt?
b) Berechne die Fläche einer Fliese in cm^2 ($A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$).
c) Wie viele Fliesen braucht man für die Wand ($1\,\text{m}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$)?
d) Mit $10\,\%$ Verschnitt: Wie viele Fliesen sollte man kaufen?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Wie viele Dreiecke?

Zähle und begründe.

a) Wie viele verschiedene (nicht kongruente) Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in cm) und Umfang $12\,\mathrm{cm}$ gibt es?
b) Zeige an einem Beispiel, dass gleiche Winkel nicht genügen: Gib zwei nicht kongruente Dreiecke mit den Winkeln 60°, 60°, 60° an.
c) Was folgt für die Dreiecksungleichung, wenn $a = b$?