# Lösungen - Kongruenz und Dreieckskonstruktion

Klasse: Klasse 7

## Lösung zu Aufgabe 1

**a)** Bei der Schreibweise $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ gehören die Punkte in derselben Reihenfolge zusammen: $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$.

**b)** Entsprechende Seiten und Winkel sind gleich groß: $PQ = AB = 7\,\text{cm}$, $QR = BC = 5\,\text{cm}$, $RP = CA = 6\,\text{cm}$. Winkel bei $P$: $44°$, bei $Q$: $57°$, bei $R$: $79°$.

**c)** Kongruente Dreiecke sind deckungsgleich. Sie haben deshalb denselben Umfang, $7 + 5 + 6 = 18\,\text{cm}$, und denselben Flächeninhalt.

## Lösung zu Aufgabe 2

Entscheidend ist, wo der Winkel im Verhältnis zu den Seiten liegt.

**a)** Drei Seiten: SSS.

**b)** $\beta$ liegt bei $B$, zwischen den Seiten $a$ und $c$: SWS.

**c)** Die Seite $c$ verbindet $A$ und $B$, liegt also zwischen $\alpha$ und $\beta$: WSW.

**d)** Zwei Seiten und der Winkel gegenüber der größeren Seite: SsW, eindeutig.

**e)** Drei Winkel legen nur die Form fest, nicht die Größe. Es gibt beliebig große Dreiecke mit diesen Winkeln, also passt kein Kongruenzsatz.

## Lösung zu Aufgabe 3

Es genügt zu prüfen, ob die beiden kürzeren Seiten zusammen länger sind als die längste.

**a)** $3 + 4 = 7$: kein Dreieck.

**b)** $5 + 6 = 11 > 10$: Dreieck möglich.

**c)** $4 + 4 = 8$ ist nicht größer als $8$: Die Punkte lägen auf einer Geraden, es entsteht kein echtes Dreieck.

**d)** $7 + 9 = 16 > 15$: möglich.

**e)** $2 + 2 = 4 > 3$: möglich.

Antwort: Nur b), d) und e) ergeben Dreiecke.

## Lösung zu Aufgabe 4

**a)** Die Seite zwischen $\alpha$ (bei $A$) und $\beta$ (bei $B$) verbindet $A$ und $B$. Das ist die Seite $c$.

**b)** Die Seiten $a$ und $b$ treffen sich im Punkt $C$, sie schließen also $\gamma$ ein.

**c)** $\gamma$ liegt zwischen $a$ und $b$, daher passt SWS. Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.

**d)** $\alpha$ liegt der Seite $a = 5$ gegenüber, und $a$ ist kleiner als $b = 7$. Der Winkel liegt also der kleineren Seite gegenüber. Dann kann der Kreisbogen den Schenkel zweimal schneiden, und es gibt zwei verschiedene Dreiecke. SsW ist hier nicht anwendbar.

## Lösung zu Aufgabe 5

**a)** Kongruent nach SWS: In beiden Dreiecken liegt der Winkel $\beta = 55^\circ$ zwischen den Seiten $a = 5$ und $c = 8$.

**b)** Mit der Winkelsumme ergänzt man die fehlenden Winkel. Dreieck 1: $\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$. Dreieck 2: $\beta = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$. Beide haben also $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$ und die Seite $c = 6$ dazwischen. Nach WSW sind sie kongruent.

**c)** Nicht kongruent: Die Winkel stimmen überein, aber die Seiten sind verschieden lang. Die Dreiecke sind nur ähnlich, das eine ist eine Vergrößerung des anderen.

## Lösung zu Aufgabe 6

**a)** Gegeben sind zwei Seiten und der Winkel $\alpha$, der zwischen $b$ und $c$ liegt: SWS.

**b)** 1. Planskizze anfertigen und $b$, $c$, $\alpha$ markieren. 2. Strecke $AB = 6\,\text{cm}$ zeichnen. 3. Im Punkt $A$ mit dem Geodreieck den Winkel $50^\circ$ antragen. 4. Auf dem freien Schenkel $5\,\text{cm}$ von $A$ aus abtragen: Das ist Punkt $C$. 5. $C$ mit $B$ verbinden.

**c)** Beim Messen ergibt sich $a \approx 4{,}7\,\text{cm}$. Kleine Abweichungen von etwa einem Millimeter sind durch Zeichenungenauigkeit normal.

## Lösung zu Aufgabe 7

**a)** Dreiecksungleichung: $4 + 5 = 9 > 6$, $4 + 6 = 10 > 5$, $5 + 6 = 11 > 4$. Alle drei Bedingungen sind erfüllt, die Konstruktion ist möglich.

**b)** Zeichne die längste Seite als Grundseite: $AB = c = 6\,\text{cm}$. Zeichne einen Kreisbogen um $A$ mit dem Radius $b = 5\,\text{cm}$ und einen Kreisbogen um $B$ mit dem Radius $a = 4\,\text{cm}$. Ihr Schnittpunkt ist $C$. Verbinde $C$ mit $A$ und $B$.

**c)** Man misst etwa $\alpha \approx 41^\circ$, $\beta \approx 56^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$. Die Summe muss $180^\circ$ ergeben. Der größte Winkel liegt der längsten Seite gegenüber.

## Lösung zu Aufgabe 8

**a)** Winkelsumme im Dreieck: $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

**b)** Zeichne $AB = 7\,\text{cm}$. Trage in $A$ den Winkel $\alpha = 50^\circ$ und in $B$ den Winkel $\beta = 60^\circ$ an, jeweils zur selben Seite der Strecke. Die freien Schenkel schneiden sich im Punkt $C$. Das ist eine Konstruktion nach WSW.

**c)** Man misst etwa $a \approx 5{,}7\,\text{cm}$ und $b \approx 6{,}5\,\text{cm}$. Kontrolle: Die längste Seite $c$ liegt dem größten Winkel $\gamma = 70^\circ$ gegenüber, die kürzeste Seite $a$ dem kleinsten Winkel $\alpha$.

## Lösung zu Aufgabe 9

**a)** Familie Köhler braucht für das zweite Beet dieselben drei Angaben: die Seiten $4\,\mathrm{m}$ und $5\,\mathrm{m}$ und den Winkel $70^\circ$, der zwischen diesen beiden Seiten liegt.

**b)** Der Kongruenzsatz SWS garantiert, dass zwei Dreiecke mit zwei gleichen Seiten und gleichem eingeschlossenem Winkel deckungsgleich sind.

**c)** Nein. Mit nur zwei Seiten lässt sich der Winkel zwischen ihnen frei wählen. Bei einem kleinen Winkel entsteht ein schmales Beet, bei einem großen Winkel ein breites. Es gibt also unendlich viele verschiedene Beete.

## Lösung zu Aufgabe 10

**a)** Ja. Beide Dreiecke stimmen in allen drei Seiten überein (3 m, 4 m, 5 m). Nach dem Kongruenzsatz SSS sind sie kongruent.

**b)** Nein. Die Dreiecksungleichung ist verletzt: $3 + 4 = 7$. Die beiden kurzen Balken reichen nicht bis zum Ende des langen Balkens.

**c)** Nach SSS legen drei Seitenlängen ein Dreieck eindeutig fest. Ein Dreieck aus festen Balken kann sich daher nicht verformen. Ein Viereck mit festen Seiten lässt sich dagegen zu einer Raute zusammendrücken. Deshalb verstärkt man Gerüste, Brücken und Dachstühle mit schrägen Streben, die Dreiecke bilden.

## Lösung zu Aufgabe 11

**a)** Alle Punkte, die von $A$ und $B$ gleich weit entfernt sind, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $AB$. Konstruktion: Zeichne Kreisbögen um $A$ und um $B$ mit demselben Radius, der größer als die halbe Strecke (5 m im Maßstab) ist. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte ist die Mittelsenkrechte.

**b)** Ebenfalls $13\,\mathrm{m}$, denn jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von beiden Endpunkten gleich weit entfernt.

**c)** Auf der Strecke $AB$ liegt nur der Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten. Er ist $10 : 2 = 5\,\mathrm{m}$ von jedem Baum entfernt.

## Lösung zu Aufgabe 12

**a)** Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind, liegen auf der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen ihnen. Die Haltestelle muss also auf der Winkelhalbierenden des Kreuzungswinkels liegen.

**b)** Die Winkelhalbierende teilt den Winkel in zwei gleich große Teile: $60^\circ : 2 = 30^\circ$ zu jeder Straße.

**c)** $110^\circ : 2 = 55^\circ$.

Hinweis: Konstruiert wird die Winkelhalbierende mit dem Zirkel. Man zeichnet einen Kreisbogen um den Scheitel und von den beiden Schnittpunkten aus zwei gleich große Bögen, deren Schnittpunkt man mit dem Scheitel verbindet.

## Lösung zu Aufgabe 13

**a)** Der Brunnen muss von $A$ und $B$ gleich weit entfernt sein, also auf der Mittelsenkrechten von $AB$ liegen. Außerdem muss er von $B$ und $C$ gleich weit entfernt sein, also auf der Mittelsenkrechten von $BC$ liegen. Der Brunnen steht im Schnittpunkt der beiden Linien. Das ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $ABC$.

**b)** Zwei genügen. Der Schnittpunkt ist von allen drei Bäumen gleich weit entfernt und liegt deshalb automatisch auch auf der dritten Mittelsenkrechten.

**c)** Liegen die Bäume auf einer Geraden, sind die Mittelsenkrechten parallel und schneiden sich nicht. Einen solchen Brunnenort gibt es dann nicht.

## Lösung zu Aufgabe 14

**a)** Gegeben sind eine Seite und die beiden Winkel an ihren Enden. Die Seite $c$ liegt zwischen $\alpha$ und $\beta$, also gilt WSW. Alle so geschnittenen Platten sind kongruent.

**b)** Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ$.

**c)** Nein. Drei Winkel legen nur die Form des Dreiecks fest, nicht seine Größe. Die Tischlerin könnte damit eine kleine oder eine große Platte schneiden, die zwar gleich aussieht, aber nicht passt. Mindestens eine Seitenlänge ist nötig.

## Lösung zu Aufgabe 15

**a)** Vergleiche die Dreiecke $ABC$ und $ADC$. Es gilt $AB = AD = 5\,\text{cm}$ und $BC = DC = 5\,\text{cm}$, weil alle Seiten der Raute gleich lang sind. Die Diagonale $AC = 6\,\text{cm}$ gehört zu beiden Dreiecken. Damit stimmen alle drei Seiten überein: kongruent nach SSS.

**b)** In kongruenten Dreiecken sind entsprechende Winkel gleich. Also ist der Winkel bei $B$ gleich dem Winkel bei $D$, und die Diagonale $AC$ halbiert die Winkel bei $A$ und bei $C$.

**c)** Winkel bei $D \approx 74^\circ$. Winkelsumme im Viereck $360^\circ$:
$\alpha = \gamma \approx (360^\circ - 148^\circ) : 2 = 106^\circ$.

## Lösung zu Aufgabe 16

**a)** Nach der Dreiecksungleichung muss $HS$ kürzer sein als die Summe der anderen Seiten und länger als ihre Differenz: $4{,}5 - 3{,}2$, also $1{,}3\,\text{km}$.

**b)** Beides nicht möglich: $1\,\text{km}$ ist kleiner als $1{,}3\,\text{km}$, und $8\,\text{km}$ ist größer als $7{,}7\,\text{km}$.

**c)** Ganzzahlig: 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 km.

**d)** Der Umweg über einen dritten Punkt besteht aus zwei Seiten eines Dreiecks, der direkte Weg ist die dritte Seite. Nach der Dreiecksungleichung gilt $HS$. Deshalb ist der direkte Weg immer kürzer.

## Lösung zu Aufgabe 17

**a)** $\gamma = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$.

**b)** Maßstab $1 : 2000$: $120\,\text{m} = 12\,000\,\text{cm}$, geteilt durch 2000 ergibt $6\,\text{cm}$. Zeichne $AB = 6\,\text{cm}$, trage in $A$ den Winkel $62^\circ$ und in $B$ den Winkel $48^\circ$ an. Der Schnittpunkt der Schenkel ist $C$. Das ist eine Konstruktion nach WSW, das Dreieck ist eindeutig.

**c)** Gemessen: $AC \approx 4{,}7\,\text{cm}$, in Wirklichkeit $4{,}7 \cdot 2000 = 9400\,\text{cm} \approx 95\,\text{m}$. $BC \approx 5{,}6\,\text{cm}$, also etwa $112\,\text{m}$.

Antwort: Der Baum ist etwa 95 m von $A$ und 112 m von $B$ entfernt.

## Lösung zu Aufgabe 18

**a)** Nach dem Antragen des Winkels in $B$ zeichnet man einen Kreisbogen um $A$ mit dem Radius $b = 6\,\text{cm}$. Wo der Bogen den freien Schenkel von $B$ schneidet, liegt der Punkt $C$.

**b)** Der Bogen schneidet den Schenkel in zwei Punkten, weil $6\,\text{cm}$ größer ist als der Abstand von $A$ zum Schenkel, aber kleiner als $c$. Es entstehen zwei verschiedene Dreiecke.

**c)** Durch Messen erhält man ungefähr $\gamma \approx 59^\circ$ für das spitzwinklige und $\gamma \approx 121^\circ$ für das stumpfwinklige Dreieck. Die beiden Winkel ergänzen sich zu $180^\circ$.

**d)** Liegt der Winkel der größeren Seite gegenüber, schneidet der Kreisbogen den Schenkel nur einmal: Es gibt genau ein Dreieck (SsW).

## Lösung zu Aufgabe 19

**a)** In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß: $180^\circ : 3 = 60^\circ$. Sechs Fliesen um einen Punkt ergeben $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, also einen vollen Winkel ohne Lücke.

**b)** $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17{,}3 = 173\,\text{cm}^2$.

**c)** Wandfläche: $2{,}2\,\text{m}^2 = 22\,000\,\text{cm}^2$. $22\,000 : 173 \approx 127{,}2$. Da man keine Teilfliese kaufen kann, braucht man 128 Fliesen.

**d)** $128 \cdot 1{,}1 = 140{,}8$, aufgerundet 141 Fliesen.

Antwort: Man sollte etwa 141 Fliesen kaufen.

## Lösung zu Aufgabe 20

**a)** Man sucht alle ganzzahligen Seiten $a \le b \le c$ mit $a + b + c = 12$ und $a + b > c$. Aus $a + b > c$ und $a + b + c = 12$ folgt $c$. Möglich sind $(2, 5, 5)$, $(3, 4, 5)$ und $(4, 4, 4)$. Es gibt also genau drei verschiedene Dreiecke.

**b)** Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite 3 cm und eines mit Seite 5 cm haben beide nur Winkel von $60^\circ$, sind aber verschieden groß.

**c)** Bei $a = b$ muss die dritte Seite kürzer als $a + b = 2a$ sein: $c$. Die anderen Bedingungen sind dann automatisch erfüllt.