Lernzettel - Anwendungsaufgaben und Daten

Klasse: Klasse 7

Welcher Handytarif ist günstiger? Reicht das Geld für die Klassenfahrt? Solche Alltagsfragen beantwortest du mit Mathematik. Hier lernst du den Modellierungskreislauf, Tabellen, Terme und die Tabellenkalkulation.

Einstieg: Wie viele Pizzen für die Klassenparty?

Die Klasse 7a feiert und möchte Pizza bestellen. 26 Kinder kommen, ein Kind isst im Schnitt $1{,}5$ Pizzen, denn die Pizzen sind klein. Wie viele Pizzen sind das? Du schätzt zuerst $26 \cdot 1{,}5 \approx 39$, also etwa 40 Pizzen. Danach prüfst du: Passt das zum Budget? Gibt es Mengenrabatt? Genau so arbeiten Mathematiker beim Modellieren: Situation verstehen, Annahmen treffen, rechnen, Ergebnis prüfen.

Mathematisches Modellieren

Definition: Modellieren

Beim **Modellieren** übersetzt man eine Alltagssituation in ein mathematisches Problem, löst es und prüft die Antwort am Alltag.

So gehst du vor: Modellierungskreislauf

1. **Verstehen:** Was ist gegeben, was ist gesucht? Lege eine Skizze oder Tabelle an.
2. **Mathematisieren:** Treffe Annahmen (zum Beispiel gleichmäßige Fahrt) und stelle Terme, Gleichungen oder Tabellen auf.
3. **Rechnen:** Löse das mathematische Problem.
4. **Interpretieren und prüfen:** Ist das Ergebnis sinnvoll? Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 1: Zoo-Ausflug

Die Klasse 7a plant einen Zoo-Ausflug. Der Eintritt kostet 6,50 € pro Schüler, der Bus 180 € pauschal, die Klassenkasse hat 400 €. Wie viele Schüler dürfen höchstens mitfahren?

Verstehen: Gesucht ist die größte Schülerzahl x mit Kosten von höchstens 400 €. Mathematisieren: $180 + 6{,}5x \leq 400$. Rechnen: $6{,}5x \leq 220$, $x \leq 33{,}8$. Interpretieren: Es können höchstens 33 Schüler mitfahren. Da die Klasse nur 28 Schüler hat, reicht das Geld.

Tabellen und Terme

Merke: Wertetabelle und Term

Viele Anwendungsaufgaben lassen sich mit einer Wertetabelle und einem Term beschreiben. Ein Fahrradverleih nimmt 5 € Grundgebühr plus 2,50 € je Stunde. Für h Stunden gilt $K(h) = 5 + 2{,}5\,h$. Die Tabelle zeigt $h = 1$: 7,50 €; $h = 2$: 10 €; $h = 4$: 15 €.

Beispiel 2: Tarifvergleich

Tarif A kostet 10 € monatlich plus 0,05 € je Minute, Tarif B kostet 0,15 € je Minute ohne Grundgebühr. Wann ist welcher günstiger?

A: $10 + 0{,}05m$. B: $0{,}15m$. Gleiche Kosten bei $10 + 0{,}05m = 0{,}15m$, also $m = 100$. Bei weniger als 100 Minuten ist B günstiger, bei mehr als 100 Minuten A.

Größen und Einheiten

Regel: Einheiten

Rechne immer mit passenden Einheiten und wandle bei Bedarf um: $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$, $1\,\text{km} = 1000\,\text{m}$, $1\,\text{h} = 60\,\text{min}$, $1\,\text{kg} = 1000\,\text{g}$, $1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3$. Die Geschwindigkeit ist $v = \frac{s}{t}$.

Beispiel 3: Zug

Ein Zug fährt in 2 Stunden 180 km. Wie schnell ist er? Wie lange braucht er für 315 km?

$v = \frac{180}{2} = 90\,\text{km/h}$. Für 315 km braucht er $\frac{315}{90} = 3{,}5$ Stunden.

Daten in der Tabellenkalkulation

So gehst du vor: Tabellenkalkulation

1. Formeln beginnen mit einem Gleichheitszeichen: `=B2*C2` multipliziert zwei Zellen.
2. Mit `=SUMME(B2:B10)` addierst du einen Bereich, mit `=MITTELWERT(B2:B10)` berechnest du den Durchschnitt.
3. Mit dem Ausfüllkästchen kopierst du eine Formel nach unten, die Zellbezüge passen sich an.
4. Aus den Tabellen erstellst du Diagramme, an denen man Entwicklungen erkennt.

Beispiel 4: Preistabelle

Spalte A enthält die Stunden 1 bis 6, Spalte B den Preis. Welche Formel steht in B2? Was ergibt sich?

In B2 steht =5+2,5*A2. Kopiert man die Formel bis B7, ergeben sich 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20 Euro.

Schätzen und Überschlagen

Definition: Überschlag und Fermi-Aufgabe

Mit einem **Überschlag** rundest du die Zahlen und prüfst, ob dein Ergebnis in der richtigen Größenordnung liegt. Bei Fermi-Aufgaben triffst du begründete Annahmen und rechnest mit gerundeten Zahlen.

Beispiel 5: Papierverbrauch

Eine Schule hat 600 Schüler, jeder verbraucht etwa 5 Blatt pro Woche, ein Schuljahr hat etwa 38 Wochen. Wie viele Blatt sind das ungefähr?

$600 \cdot 5 \cdot 38 = 114\,000$ Blatt.

Annahmen und Grenzen von Modellen

Hinweis

Jedes Modell vereinfacht die Wirklichkeit. Wer annimmt, dass ein Zug gleichmäßig fährt, ignoriert Haltestellen und Verspätungen. Wer Pflanzenwachstum mit einer Geraden beschreibt, ignoriert, dass Pflanzen irgendwann nicht mehr wachsen. Nenne deshalb deine Annahmen: „Unter der Annahme, dass die Fahrt gleichmäßig verläuft, braucht der Zug etwa 3,5 Stunden.“ Vergleiche außerdem dein Ergebnis mit einer Schätzung, um grobe Fehler zu entdecken.

Beispiel 9: Modellieren Schritt für Schritt

Lohnt sich eine Jahreskarte für das Freibad (*95\,€*) gegenüber Einzelkarten zu *3{,}50\,€*?

Modell: Kosten für n Besuche mit Einzelkarten: $3{,}5n$. Gleichheit bei $3{,}5n = 95$, also $n \approx 27{,}1$. Antwort: Ab 28 Besuchen ist die Jahreskarte günstiger. Annahme: Der Preis bleibt gleich und man nutzt das Bad regelmäßig.

Beispiel 10: Schätzen mit Überschlag

Wie viele Seiten liest man in einem Jahr, wenn man jeden Tag 25 Seiten liest?

$25 \cdot 365 \approx 25 \cdot 400 = 10\,000$ Seiten. Genauer: $25 \cdot 365 = 9\,125$ Seiten. Der Überschlag ist nur $9\,\%$ größer als das genaue Ergebnis und reicht für eine erste Aussage.

Beispiel 11: Daten in der Tabelle

Die Temperaturen einer Woche sind 14, 16, 15, 18, 17, 19, 15 Grad. Berechne den Mittelwert mit einer Tabellenkalkulation.

Man schreibt die Werte in die Zellen $\mathrm{A1}$ bis $\mathrm{A7}$ und gibt in $\mathrm{A8}$ die Formel $=\mathrm{MITTELWERT}(\mathrm{A1{:}A7})$ ein. Das Ergebnis ist $\frac{114}{7} \approx 16{,}3$ Grad.

Typische Fehler

(1) Einheiten nicht umrechnen: $2\,\mathrm{h}$ und $30\,\mathrm{min}$ sind $2{,}5\,\mathrm{h}$, nicht $2{,}3\,\mathrm{h}$. (2) Das Ergebnis nicht auf Sinn prüfen: Eine Pizza für *0{,}08\,€* ist unrealistisch. (3) Beim Aufrunden und Abrunden die Situation vergessen: Für $7{,}5$ Eier muss man 8 kaufen. (4) Ein Modell für die Wirklichkeit halten: Es gilt nur unter den getroffenen Annahmen.

Wusstest du?

Der Physiker Enrico Fermi stellte seinen Studenten Fragen wie „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ Man kann sie ohne Nachschlagen durch Schätzen und Überschlagen beantworten. Solche Aufgaben heißen deshalb Fermi-Aufgaben. Die erste Tabellenkalkulation, VisiCalc, erschien 1979 und machte Büro-Computer populär.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Modellierungskreislauf: verstehen, mathematisieren, rechnen, interpretieren und prüfen.
- Situationen werden durch Tabellen, Terme und Gleichungen beschrieben.
- Einheiten beachten und umrechnen: $v = \frac{s}{t}$.
- Tarife vergleicht man, indem man die Terme gleichsetzt.
- Tabellenkalkulation: Formeln beginnen mit $=$, zum Beispiel SUMME und MITTELWERT.
- Überschlag und Antwortsatz gehören zu jeder Lösung.

Achtung

Beantworte die Frage mit einem Satz, nicht nur mit einer Zahl. Mische keine Einheiten wie Minuten und Stunden. Prüfe, ob das Ergebnis Sinn hat (keine negativen Zeiten, keine halben Personen). In der Tabellenkalkulation das Gleichheitszeichen nicht vergessen und Zellbezüge richtig setzen.

Vertiefung: Sachaufgaben sicher lösen

Einstieg: Reicht das Geld für den Ausflug?

Die Klasse 7b möchte in den Kletterpark. Der Eintritt kostet *14\,€*, die Busfahrt insgesamt *180\,€*, und in der Klassenkasse liegen *250\,€*. Bevor man rechnet, muss man klären: Wie viele Personen fahren mit? Zählen die Lehrkräfte mit? Gibt es eine Gruppenermäßigung? Solche Fragen gehören zum Modellieren. Die Wirklichkeit ist meistens komplizierter als eine Rechenaufgabe, deshalb trifft man sinnvolle Annahmen, rechnet damit und prüft am Ende, ob das Ergebnis zur Wirklichkeit passt. Genau dieses Vorgehen übst du in diesem Kapitel.

Merke: Die vier Schritte beim Modellieren

Erstens **verstehen**: Was ist gegeben, was ist gesucht? Zweitens **mathematisieren**: Welche Rechnung, welcher Term oder welche Gleichung beschreibt die Situation? Drittens **rechnen**: Löse die mathematische Aufgabe sorgfältig. Viertens **interpretieren und prüfen**: Was bedeutet das Ergebnis in der Wirklichkeit? Ist es plausibel, muss gerundet werden, und welche Annahmen könnten falsch sein? Wenn das Ergebnis nicht passt, beginnt der Kreislauf von vorn mit besseren Annahmen.

So gehst du vor: Sinnvoll runden

1. Überlege, welche Einheit und welche Genauigkeit die Antwort braucht. Geldbeträge rundet man auf Cent, Längen im Alltag oft auf Zentimeter oder Meter.
2. Bei Dingen, die man nur ganz kaufen kann (Eimer, Säcke, Busse), rundest du immer auf, damit es reicht.
3. Bei Dingen, die man höchstens schafft (Anzahl voller Tage, Anzahl Personen in einem Raum), rundest du ab.
4. Schreibe in den Antwortsatz, dass gerundet wurde, zum Beispiel „etwa“ oder „mindestens“.

Beispiel 12: Eine Fermi-Aufgabe

Wie viele Liter Milch trinken alle Schülerinnen und Schüler einer Schule mit 600 Kindern in einem Schuljahr?

Hier fehlen Angaben, also triffst du begründete Annahmen. Nimm an, dass die Hälfte der Kinder täglich ein Glas Milch mit $0{,}2$ Litern trinkt. Ein Schuljahr hat etwa 190 Schultage. Dann ergibt sich $300 \cdot 0{,}2 \cdot 190 = 11\,400$ Liter. Das Ergebnis ist keine genaue Zahl, sondern eine Größenordnung: etwa zehntausend Liter. Wichtig ist, dass du deine Annahmen offenlegst, damit andere sie prüfen und verbessern können. Mit anderen, ebenso vernünftigen Annahmen darf ein etwas anderes Ergebnis herauskommen.

Achtung: Einheiten vor dem Rechnen angleichen

Wer 45 Minuten und $20\,\mathrm{km/h}$ einfach multipliziert, erhält 900 und damit Unsinn. Zuerst müssen die Einheiten zusammenpassen: 45 Minuten sind $0{,}75$ Stunden, also

$20 \cdot 0{,}75 = 15\,\text{km}$. Genauso müssen Gramm und Kilogramm oder Zentimeter und Meter vor dem Rechnen in dieselbe Einheit umgerechnet werden. Schreibe die Einheiten in jeder Zeile mit, dann fallen solche Fehler sofort auf.

Schon gewusst?

Fermi-Aufgaben sind nach dem Physiker Enrico Fermi benannt, der berühmt dafür war, schwierige Größen allein durch geschicktes Schätzen erstaunlich genau zu bestimmen. Eine klassische Frage lautet: „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ Auch Unternehmen stellen solche Fragen in Bewerbungsgesprächen. Es geht dabei nicht um die genaue Zahl, sondern darum, ob man ein Problem in kleine, abschätzbare Teile zerlegen kann.

Ottos Tipp

Markiere in jedem Aufgabentext die Zahlen farbig und unterstreiche die Frage. Schreibe danach in einem Satz, was du berechnen willst. Dieser eine Satz verhindert, dass du eine falsche Größe ausrechnest. Zum Schluss prüfst du, ob dein Ergebnis zur Situation passt.