Lernzettel - Zuordnungen und Dreisatz

Klasse: Klasse 6

Preis und Menge, Zeit und Strecke, Arbeiter und Tage: Überall gehören Größen zusammen. Hier lernst du, Zuordnungen zu erkennen und mit dem Dreisatz zu rechnen.

Einstieg: Nudeln für die Klasse

Auf der Nudelpackung steht: „100 g für eine Person“. Für eine Klassenparty mit 24 Kindern brauchst du $2{,}4$ kg. Kommen doppelt so viele Gäste, brauchst du doppelt so viel Nudeln. Wenn dagegen ein Pizzabote 30 Minuten für den Weg braucht und doppelt so schnell fährt, braucht er nur noch halb so lange. In beiden Fällen hängen zwei Größen zusammen, aber auf verschiedene Weise. In diesem Kapitel lernst du, solche Zuordnungen zu erkennen, in Tabellen und Graphen darzustellen und mit dem Dreisatz fehlende Werte zu berechnen. Das brauchst du beim Kochen, beim Einkaufen, auf Reisen und später in vielen Berufen.

Was ist eine Zuordnung?

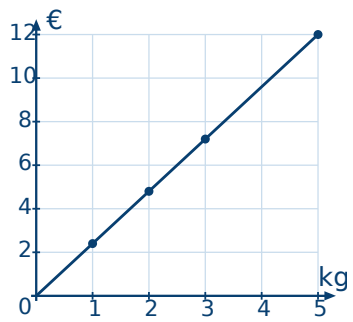
Definition: Zuordnung

Eine **Zuordnung** ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer anderen Größe zu. Beispiele: der Anzahl der Brötchen ihr Preis, der Fahrzeit die Strecke. Man stellt sie dar als **Tabelle**, als **Graph** im Koordinatensystem oder als **Text oder Term**.

Proportionale Zuordnungen

Definition: proportional

Eine Zuordnung heißt **proportional**, wenn zum Doppelten (Dreifachen, Halben ...) des einen Wertes auch das Doppelte (Dreifache, Halbe ...) des anderen gehört.



Merke: Merkmale proportional

In der Tabelle ist der **Quotient y : x immer gleich** (der **Proportionalitätsfaktor**).

Der Graph ist eine **Gerade durch den Ursprung** (0|0).

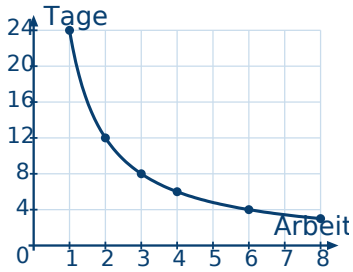
Menge (kg)	1	2	3	5
Preis (€)	2,40	4,80	7,20	12,00

Hier ist der Faktor 2,40 €/kg, der Preis für 1 kg. Weitere Beispiele: Strecke und Zeit bei gleichbleibender Geschwindigkeit.

Antiproportionale Zuordnungen

Definition: antiproportional

Eine Zuordnung heißt **antiproportional**, wenn zum Doppelten des einen Wertes die Hälfte des anderen gehört (zum Dreifachen ein Drittel und so weiter).



Merke: Merkmale antiproportional

In der Tabelle ist das **Produkt x · y immer gleich**. Der Graph ist eine **gekrümmte Kurve** (Hyperbel), keine Gerade.

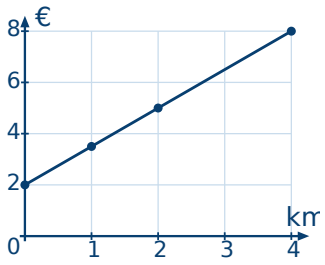
Arbeiter	1	2	3	4	6
Tage	12	6	4	3	2

Hier ist x · y = 12 immer gleich: Die Arbeit entspricht 12 „Arbeiter-Tagen“. Weitere Beispiele: Geschwindigkeit und Fahrzeit für dieselbe Strecke, Personenzahl und Portion bei gleichem Vorrat.

Weder noch

Hinweis

Viele Zuordnungen sind weder proportional noch antiproportional. Mit zehn Jahren ist ein Kind nicht doppelt so groß wie mit fünf. Eine Taxifahrt mit Grundgebühr ist nicht proportional, denn bei 0 km muss schon etwas bezahlt werden.



Beispiel 1: Proportional oder nicht?

Tabelle: x = 1, 2, 3, 4 und y = 5, 10, 16, 20. Ist die Zuordnung proportional?

Quotienten: 5, 5, 5,33..., 5. Sie sind nicht alle gleich (bei x = 3 müsste y = 15 sein). Die Zuordnung ist nicht proportional.

Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen

So gehst du vor: Dreisatz proportional

1. **Ausgangssatz:** Schreibe auf, was gegeben ist.
2. **Zwischensatz:** Rechne auf die Einheit (1 Stück, 1 kg, 1 Stunde) durch Teilen.
3. **Schlusssatz:** Rechne von der Einheit auf die gesuchte Menge durch Multiplizieren.

Beispiel 2: Hefte

4 Hefte kosten 5,60 €. Wie viel kosten 7 Hefte?

4 Hefte: 5,60 €. 1 Heft: $5{,}60 : 4 = 1{,}40\,€$. 7 Hefte: $7 \cdot 1{,}40 = 9{,}80\,€$.

Beispiel 3: Maßstab

Eine Karte hat den Maßstab 1 : 50 000. Auf der Karte sind es 3 cm. Wie lang ist die Strecke in Wirklichkeit?

$3 \cdot 50\,000\ \text{cm} = 150\,000\ \text{cm} = 1{,}5\ \text{km}$. Karte und Wirklichkeit sind proportional.

Beispiel 4: Preisvergleich

Eine 500-g-Packung Nudeln kostet 1,45 €, eine 750-g-Packung 2,10 €. Welche ist günstiger?

Preis je 100 g: $1{,}45 : 5 = 0{,}29\,€$ und $2{,}10 : 7{,}5 = 0{,}28\,€$. Die größere Packung ist etwas günstiger.

Dreisatz bei antiproportionalen Zuordnungen

So gehst du vor: Dreisatz antiproportional

1. **Ausgangssatz:** Schreibe auf, was gegeben ist.
2. **Zwischensatz:** Gehe auf die Einheit: Wird der eine Wert durch eine Zahl geteilt, multipliziert man den anderen mit ihr.
3. **Schlusssatz:** Gehe von der Einheit auf die gesuchte Menge: Multipliziert man den einen Wert, teilt man den anderen.

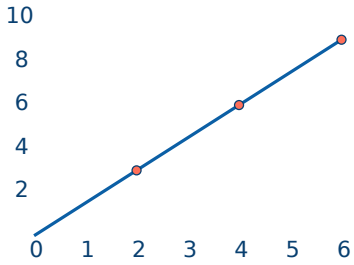
Beispiel 5: Arbeiter

4 Arbeiter brauchen 6 Tage. Wie lange brauchen 8 Arbeiter?

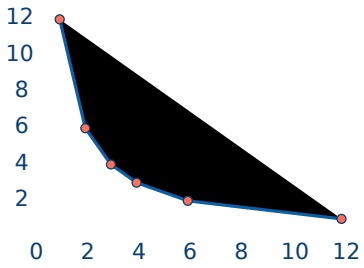
4 Arbeiter: 6 Tage. 1 Arbeiter: $6 \cdot 4 = 24$ Tage (einer braucht viermal so lange). 8 Arbeiter: $24 : 8 = 3$ Tage. Auch die Gesamtarbeit 24 Arbeiter-Tage durch die neue Zahl zu teilen führt zum Ziel.

Wertetabelle und Graph

Eine **proportionale** Zuordnung erkennst du im Graphen an einer Geraden durch den Ursprung. Der Graph unten gehört zu $y = 1{,}5 \cdot x$: Zu 2 gehört 3, zu 4 gehört 6, zu 6 gehört 9.



Eine **antiproportionale** Zuordnung hat als Graph eine fallende Kurve, die weder die x-Achse noch die y-Achse berührt. Hier gilt $x \cdot y = 12$: Wenn x größer wird, wird y kleiner.



Quotienten- und Produktgleichheit

Regel: Proportional oder antiproportional prüfen

Eine Zuordnung ist **proportional**, wenn der Quotient $\frac{y}{x}$ immer gleich ist (Proportionalitätsfaktor). Sie ist **antiproportional**, wenn das Produkt $x \cdot y$ immer gleich ist. Gilt keins von beiden, ist sie weder noch.

Beispiel 6: Welche Zuordnung?

Prüfe die Tabelle: x: $2,\ 3,\ 6$ und y: $12,\ 8,\ 4$.

Quotienten: $\frac{12}{2} = 6$, $\frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $\frac{4}{6} \approx 0{,}67$: nicht gleich. Produkte: $2 \cdot 12 = 24$, $3 \cdot 8 = 24$, $6 \cdot 4 = 24$: gleich. Die Zuordnung ist antiproportional mit dem Produkt 24.

Der Dreisatz im Schema

So gehst du vor: Dreisatz mit Merkzettel

1. Schreibe die gegebene Zuordnung als Zeile auf und die gesuchte darunter.
2. Entscheide: proportional (je mehr, desto mehr) oder antiproportional (je mehr, desto weniger).
3. Gehe zuerst auf die Einheit (1 Stück, 1 Person, 1 Stunde). Proportional: teilen. Antiproportional: multiplizieren.
4. Gehe dann auf die gesuchte Menge. Proportional: mal. Antiproportional: teilen.
5. Antworte mit einem Satz und prüfe, ob das Ergebnis passt.

Beispiel 7: Äpfel kaufen (proportional)

5 kg Äpfel kosten $8{,}75$ €. Wie viel kosten 8 kg?

5 kg: $8{,}75$ €. Auf 1 kg: $8{,}75 : 5 = 1{,}75$ €. Auf 8 kg: $1{,}75 \cdot 8 = 14{,}00$ €. Je mehr Äpfel, desto mehr Geld: proportional. Antwort: 8 kg kosten 14 €.

Beispiel 8: Maler (antiproportional)

6 Maler streichen ein Haus in 10 Tagen. Wie lange brauchen 4 Maler?

6 Maler: 10 Tage. 1 Maler: $10 \cdot 6 = 60$ Tage. 4 Maler: $60 : 4 = 15$ Tage. Je weniger Maler, desto länger: antiproportional. Probe: $6 \cdot 10 = 60 = 4 \cdot 15$.

Zuordnungen, die weder noch sind

Beispiel 9: Taxifahrt

Eine Taxifahrt kostet 3 € Grundgebühr plus 2 € pro Kilometer. Ist die Zuordnung Strecke → Preis proportional?

Preise: 1 km: 5 €, 2 km: 7 €, 4 km: 11 €. Quotienten: $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{7}{2} = 3{,}5$, $\frac{11}{4} = 2{,}75$: nicht gleich. Verdoppelt man die Strecke, verdoppelt sich der Preis nicht (5 € auf 7 €). Die Zuordnung ist weder proportional noch antiproportional.

Geschwindigkeit, Strecke und Zeit

Beispiel 10: Antiproportional bei fester Strecke

Eine Strecke von 120 km wird mit 60 km/h in 2 h gefahren. Wie lange dauert die Fahrt mit 80 km/h?

Bei fester Strecke ist die Zuordnung Geschwindigkeit → Zeit antiproportional.
$60 \cdot 2 = 120$, also $80 \cdot t = 120$, $t = 120 : 80 = 1{,}5$ h $= 1$ h 30 min.

Achtung: Typische Fehler

Nicht jede „je mehr, desto mehr“-Zuordnung ist proportional: Bei der Taxifahrt mit Grundgebühr steigt der Preis, aber nicht im gleichen Verhältnis. Alter und Körpergröße eines Kindes sind nicht proportional. Beim antiproportionalen Dreisatz multiplizierst du zuerst und teilst danach, beim proportionalen teilst du zuerst und multiplizierst danach. Vergiss nicht die Einheiten, und prüfe das Ergebnis mit einer Überlegung: Mehr Maler brauchen weniger Tage.

Wusstest du schon?

Der Dreisatz hieß früher „Regel de Tri“ (lateinisch für „Regel von drei“), weil aus drei bekannten Zahlen die vierte berechnet wird. Der Rechenmeister Adam Ries brachte ihn im 16. Jahrhundert in seinen Rechenbüchern allen Kaufleuten und Handwerkern bei.

Einstiegsaktivität: Zuordnungen im Alltag sammeln

Sammle in Partnerarbeit fünf Beispiele aus deinem Alltag, bei denen eine Größe von einer anderen abhängt: Anzahl der Kugeln Eis und Preis, Anzahl der Helfer beim Aufräumen und benötigte Zeit, Alter und Taschengeld. Prüfe bei jedem Beispiel mit der Frage „Was passiert, wenn ich die erste Größe verdopple?“. Verdoppelt sich die zweite Größe, ist die Zuordnung proportional. Halbiert sie sich, ist sie antiproportional. Passiert etwas anderes, ist sie weder noch. Ordnet eure Beispiele in einer Tabelle mit drei Spalten.

Schon gewusst?

Der Dreisatz war früher als „Regel de Tri“ oder „goldene Regel“ bekannt. Händler im Mittelalter mussten ständig Preise für andere Mengen ausrechnen. Adam Ries erklärte den Dreisatz in seinen Rechenbüchern im 16. Jahrhundert so verständlich, dass man noch heute sagt: „Das macht nach Adam Riese …“.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Zuordnung ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert der anderen

Größe zu; sie wird in Tabelle, Graph und Text dargestellt.
- Proportional: Doppelte Menge, doppelter Wert; $\frac{y}{x}$ ist konstant; der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung.
- Antiproportional: Doppelte Menge, halber Wert; $x \cdot y$ ist konstant; der Graph ist eine fallende Kurve.
- Dreisatz proportional: erst auf die Einheit teilen, dann mit der gesuchten Menge multiplizieren.
- Dreisatz antiproportional: erst auf die Einheit multiplizieren, dann durch die gesuchte Menge teilen.
- Manche Zuordnungen sind weder proportional noch antiproportional, zum Beispiel Preis mit Grundgebühr.
- Vor dem Rechnen immer entscheiden: je mehr, desto mehr (proportional) oder je mehr, desto weniger (antiproportional)?

Achtung

Halte nicht alles für proportional: Prüfe vorher, ob zum Doppelten wirklich das Doppelte gehört. Bei antiproportionalen Aufgaben brauchen mehr Arbeiter weniger Zeit. Vergiss im Zwischensatz nicht, auf die Einheit zu gehen. Mische keine Einheiten wie Minuten und Stunden.

Ottos Tipp

Frage dich: „Wenn ich doppelt so viel nehme, wird dann das andere doppelt so groß oder halb so groß?“ Doppelt heißt proportional, halb heißt antiproportional. Mit dieser Probe vermeidest du den falschen Rechenweg.