Lernzettel - Vierecke und ihre Eigenschaften

Klasse: Klasse 6

Quadrat, Rechteck, Raute und Co. unterscheiden sich in Seiten, Winkeln und Diagonalen. In diesem Kapitel lernst du die besonderen Vierecke und ihre Eigenschaften kennen.

Einstieg: Vierecke überall

Schau dich im Klassenzimmer um: Die Tafel ist ein Rechteck, die Fliesen auf dem Boden sind Quadrate, ein Drachen am Himmel hat die Form eines Drachenvierecks, und manche Schultische sind Trapeze, damit man sie zu einem Sechseck zusammenstellen kann. Vierecke begegnen dir in der Architektur, in der Kunst und beim Basteln. Alle haben vier Ecken und vier Seiten, doch ihre Eigenschaften sind sehr verschieden. In diesem Kapitel lernst du die besonderen Vierecke kennen, ihre Eigenschaften zu nutzen, Winkel zu berechnen, den Umfang zu bestimmen und Vierecke zu konstruieren. Das Ordnungsprinzip dahinter heißt „Haus der Vierecke“.

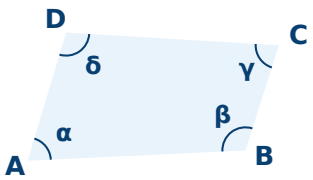
Was ist ein Viereck?

Definition: Viereck

Ein **Viereck** hat vier Ecken A, B, C, D, vier Seiten a, b, c, d und vier Innenwinkel α, β, γ, δ. Die Ecken werden gegen den Uhrzeigersinn benannt.

Definition: Diagonale

Eine **Diagonale** verbindet zwei gegenüberliegende Ecken. Jedes Viereck hat zwei Diagonalen: AC und BD.



Satz: Winkelsumme im Viereck

Die Summe der Innenwinkel in jedem Viereck beträgt $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Eine Diagonale zerlegt das Viereck in zwei Dreiecke, jedes hat die Winkelsumme 180°.

Beispiel 1: Fehlender Winkel

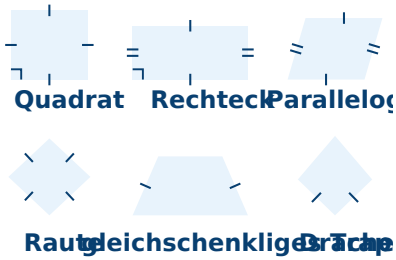
Ein Viereck hat $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 100^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$. Berechne δ.

$\delta = 360° - 80° - 100° - 90° = 90°.$

Die besonderen Vierecke

Definition: Quadrat

Vier gleich lange Seiten und vier rechte Winkel. Gegenüberliegende Seiten sind parallel. Die Diagonalen sind gleich lang, stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen.



Definition: Rechteck

Vier rechte Winkel, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel. Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich. Es hat 2 Symmetrieachsen (durch die Mitten gegenüberliegender Seiten).

Definition: Parallelogramm

Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß, benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°. Die Diagonalen halbieren sich. Es hat keine Symmetrieachse, ist aber punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen.

Definition: Raute (Rhombus)

Vier gleich lange Seiten. Sie ist ein Parallelogramm mit lauter gleich langen Seiten. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, halbieren sich und sind die zwei Symmetrieachsen.

Definition: Trapez

Mindestens ein Paar paralleler Seiten. Sind die nicht parallelen Seiten (Schenkel) gleich lang, heißt es gleichschenkliges Trapez und hat 1 Symmetrieachse.

Definition: Drachen

Zwei Paare benachbarter, gleich langer Seiten. Die Diagonalen stehen senkrecht

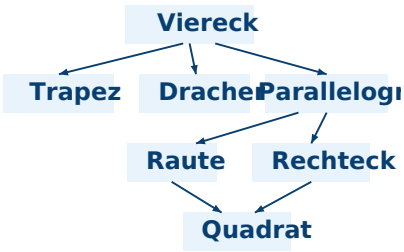
aufeinander, und eine davon ist Symmetrieachse.

Viereck	Symmetrieachsen
Quadrat	4
Rechteck	2
Raute	2
Drachen	1
gleichschenkliges Trapez	1
Parallelogramm	0

Das Haus der Vierecke

Satz: Haus der Vierecke

Jedes Quadrat ist eine Raute und ein Rechteck. Jede Raute und jedes Rechteck ist ein Parallelogramm. Jedes Parallelogramm ist ein Trapez, weil es mindestens ein Paar paralleler Seiten hat. Das Quadrat ist das speziellste Viereck. Der Umkehrschluss gilt nicht: Nicht jedes Rechteck ist ein Quadrat.



Merke

Alles, was für ein Parallelogramm gilt, gilt auch für Raute, Rechteck und Quadrat.

Winkel in Vierecken

Beispiel 2: Parallelogramm

In einem Parallelogramm ist $\alpha = 65°$. Berechne die anderen Winkel.

$\gamma = \alpha = 65°$ (gegenüberliegende Winkel), $\beta = \delta = 180° - 65° = 115°$. Kontrolle: $65 + 115 + 65 + 115 = 360°$.

Beispiel 3: Trapez

Ein Trapez ABCD hat die parallelen Seiten AB und CD. Es ist $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$. Berechne γ und δ.

Es gilt $\alpha + \delta = 180^\circ$ und $\beta + \gamma = 180^\circ$. Also $\delta = 110^\circ$ und $\gamma = 100^\circ$. Kontrolle: $70 + 80 + 100 + 110 = 360^\circ$.

Umfang

Regel: Umfang

Der Umfang ist die Summe aller Seitenlängen. Quadrat und Raute: $u = 4 \cdot a$. Rechteck und Parallelogramm: $u = 2 \cdot (a + b)$. Drachen: $u = 2 \cdot (a + b)$ mit den beiden verschiedenen Seitenlängen.

Beispiel 4: Zurückrechnen

Ein Rechteck hat den Umfang 30 cm und eine Länge von 9 cm. Wie breit ist es?

Der halbe Umfang ist $a + b = 15\ \text{cm}$. Die Breite ist $15 - 9 = 6\ \text{cm}$.

Vierecke konstruieren

So gehst du vor: Rechteck konstruieren

1. Zeichne eine Strecke von 5 cm Länge.
2. Trage in beiden Endpunkten einen rechten Winkel ab.
3. Markiere jeweils 3 cm.
4. Verbinde die Endpunkte.

So gehst du vor: Raute konstruieren

1. Zeichne eine Seite von 4 cm.
2. Trage am Anfang den Winkel 60° ab und markiere darauf 4 cm.
3. Ergänze mit dem Zirkel den vierten Eckpunkt, der von beiden Nachbarecken 4 cm Abstand hat.

Eigenschaften der besonderen Vierecke

Viereck	Gleiche Seiten	Parallele Seiten	Diagonalen
Quadrat	alle vier	zwei Paare	gleich lang, halbieren sich, senkrecht
Rechteck	gegenüberliegende	zwei Paare	gleich lang, halbieren sich
Raute	alle vier	zwei Paare	senkrecht, halbieren sich

Viereck	Gleiche Seiten	Parallele Seiten	Diagonalen
Parallelogramm	gegenüberliegende	zwei Paare	halbieren sich
Drachen	zwei Paare benachbarter	keine	senkrecht, eine halbiert die andere
Trapez	keine nötig	ein Paar	keine besondere

Regel: Winkel im Parallelogramm

Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß, benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°. Das gilt auch für Rechteck, Raute und Quadrat, denn sie sind besondere Parallelogramme.

Beispiel 5: Winkel in der Raute

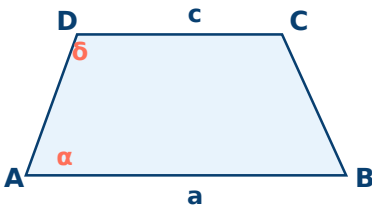
In einer Raute ist $\alpha = 70^\circ$. Berechne die anderen Winkel.

Gegenüber von α liegt $\gamma = 70^\circ$. Benachbart ist $\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, ebenso $\delta = 110^\circ$. Probe: $70^\circ + 110^\circ + 70^\circ + 110^\circ = 360^\circ$.

Das Trapez

Definition: Trapez

Ein **Trapez** ist ein Viereck mit mindestens einem Paar paralleler Seiten. Die parallelen Seiten heißen **Grundseiten**, die anderen **Schenkel**. Sind die Schenkel gleich lang, heißt das Trapez **gleichschenklig**.



Regel: Winkel am Trapez

Winkel an demselben Schenkel ergänzen sich zu 180°: $\alpha + \delta = 180^\circ$ und $\beta + \gamma = 180^\circ$. Im gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an derselben Grundseite gleich groß.

Beispiel 6: Winkel im Trapez

In einem gleichschenkligen Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ ist $\alpha = 65^\circ$. Wie groß sind β, γ und δ?

Gleichschenklig: $\beta = \alpha = 65^\circ$. Am Schenkel gilt $\delta = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, und

$\gamma = \delta = 115°$. Summe: $65 + 65 + 115 + 115 = 360$.

Welches Viereck bin ich?

So gehst du vor: Ein Viereck bestimmen

1. Prüfe zuerst die Seiten: Wie viele Paare sind gleich lang, welche sind parallel?
2. Prüfe dann die Winkel: Gibt es rechte Winkel?
3. Nimm die Diagonalen dazu: Sind sie gleich lang, stehen sie senkrecht, halbieren sie sich?
4. Wähle das Viereck, das alle Merkmale hat, und zwar das speziellste im Haus der Vierecke.

Beispiel 7: Rätsel

Ein Viereck hat vier gleich lange Seiten, aber keine rechten Winkel. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. Welches Viereck ist es?

Vier gleich lange Seiten gibt es bei Raute und Quadrat. Ein Quadrat hätte rechte Winkel, also ist es eine **Raute**.

Umfang und Konstruktion

Beispiel 8: Umfang einer Raute

Eine Raute hat die Seitenlänge $6{,}5$ cm. Wie groß ist der Umfang?

Alle vier Seiten sind gleich lang: $U = 4 \cdot 6{,}5 = 26$ cm. Beim Parallelogramm mit $a = 8$ cm und $b = 5$ cm: $U = 2 \cdot (8 + 5) = 26$ cm.

Beispiel 9: Parallelogramm konstruieren

Konstruiere ein Parallelogramm mit $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $\alpha = 70°$.

1. Zeichne $AB = 6$ cm. 2. Trage in A den Winkel $70°$ an und miss auf dem Schenkel $AD = 4$ cm ab. 3. Ziehe durch D eine Parallele zu AB und durch B eine Parallele zu AD, zum Beispiel mit dem Geodreieck. Der Schnittpunkt der Parallelen ist C. Alternativ: Zirkel um B mit Radius 4 cm und um D mit Radius 6 cm; sie schneiden sich in C.

Achtung: Typische Fehler

Ein Quadrat ist auch ein Rechteck und eine Raute, aber nicht umgekehrt. Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten kann ein Quadrat oder eine Raute sein, das entscheiden erst die Winkel. Die Winkelsumme im Viereck beträgt $360°$, nicht $180°$. Beim Trapez müssen nur zwei Seiten parallel sein. Und beim Drachen sind nicht gegenüberliegende, sondern benachbarte Seiten gleich lang.

Wusstest du schon?

Parkettierungen, also lückenlose Pflasterungen der Ebene mit Vierecken, findest du auf Gehwegen, in Moscheen, im Alhambra-Palast in Spanien und in den Bildern des Künstlers M. C. Escher. Jedes beliebige Viereck kann man lückenlos aneinanderlegen, weil die Winkelsumme genau 360° beträgt.

Einstiegsaktivität: Vierecke aus Trinkhalmen

Schneide aus Trinkhalmen vier Stücke und fädle sie auf einen Faden, sodass ein bewegliches Viereck entsteht. Nimm zuerst vier gleich lange Stücke. Du kannst das Viereck zu einem Quadrat aufziehen oder es schief drücken: Dann entsteht eine Raute. Die Seiten bleiben gleich, nur die Winkel ändern sich. Nimm danach zwei lange und zwei kurze Stücke und lege gleich lange Stücke gegenüber: Du erhältst ein Rechteck oder ein Parallelogramm. Liegen die gleich langen Stücke nebeneinander, entsteht ein Drachen. So erkennst du, dass die Seitenlängen allein ein Viereck noch nicht festlegen.

Schon gewusst?

Bienen bauen ihre Waben nicht aus Vierecken, sondern aus Sechsecken. In der Architektur dagegen sind Rechtecke überall: Türen, Fenster, Bücher und Bildschirme sind fast immer rechteckig, weil man sie lückenlos aneinanderlegen und leicht stapeln kann.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Viereck hat vier Ecken, vier Seiten und die Winkelsumme 360°.
- Parallelogramm: gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang; gegenüberliegende Winkel gleich, benachbarte ergänzen sich zu 180°.
- Rechteck: vier rechte Winkel, gleich lange Diagonalen. Raute: vier gleiche Seiten, Diagonalen senkrecht.
- Quadrat: alles zusammen, vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel. Drachen: zwei Paare benachbarter gleicher Seiten.
- Trapez: mindestens ein Paar paralleler Seiten; Winkel am selben Schenkel ergänzen sich zu 180°.
- Im Haus der Vierecke ist jedes Quadrat auch Rechteck, Raute, Parallelogramm und Trapez.
- Umfang: Summe aller Seiten, bei Rechteck $2(a+b)$, bei Raute und Quadrat $4a$; Konstruktion mit Winkel, Seiten und Parallelen.

Achtung

Beim Trapez genügt ein Paar paralleler Seiten. Eine Raute hat nicht automatisch rechte Winkel. Ein Quadrat ist ein Rechteck, aber nicht jedes Rechteck ist ein Quadrat. Beim Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich, benachbarte ergeben

180°. Prüfe immer die Winkelsumme 360°.

Ottos Tipp

Zeichne bei jeder Aufgabe das Viereck und beide Diagonalen. Dann siehst du sofort, ob die Diagonalen senkrecht sind, sich halbieren oder gleich lang sind, und kannst das Viereck bestimmen.