Lösungen - Vierecke und ihre Eigenschaften

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

Wir prüfen bei jedem Merkmal, welches Viereck es am genauesten beschreibt.
a) Vier gleich lange Seiten und vier rechte Winkel hat nur das Quadrat.
b) Gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang, aber weder rechte Winkel noch vier gleiche Seiten: Das ist ein allgemeines Parallelogramm.
c) Zwei Paare benachbarter gleich langer Seiten und senkrechte Diagonalen sind die Kennzeichen des Drachens.
d) Genau ein Paar paralleler Seiten hat das Trapez.
e) Vier rechte Winkel, aber nur gegenüberliegende Seiten gleich lang: Das ist ein Rechteck, das kein Quadrat ist.

Lösung zu Aufgabe 2

In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360°, weil man es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu je 180° zerlegen kann.
a) $\delta = 360^\circ - 85^\circ - 95^\circ - 110^\circ = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$.
b) $\gamma = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ - 75^\circ = 360^\circ - 255^\circ = 105^\circ$.
c) $\alpha = 360^\circ - 100^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$.
d) $360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$. Auch der vierte Winkel ist ein rechter Winkel, das Viereck ist also ein Rechteck (oder Quadrat).

Lösung zu Aufgabe 3

Im Parallelogramm (und damit in jeder Raute) sind gegenüberliegende Winkel gleich groß, benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°.
a) $\gamma = \alpha = 65^\circ$; $\beta = \delta = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.
b) $\gamma = 112^\circ$; $\beta = \delta = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.
c) $\delta = \beta = 48^\circ$; $\alpha = \gamma = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.
d) $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = \delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Eine Raute mit lauter rechten Winkeln ist ein Quadrat.
Kontrolle zu a): $65 + 115 + 65 + 115 = 360$.

Lösung zu Aufgabe 4

Weil $AB \parallel CD$, sind die Winkel an einem Schenkel Nachbarwinkel an Parallelen und ergänzen sich zu 180°: $\alpha + \delta = 180^\circ$ und $\beta + \gamma = 180^\circ$.
a) $\delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
b) $\gamma = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
c) Im gleichschenkligen Trapez sind die Basiswinkel gleich: $\beta = \alpha = 58^\circ$. Dann $\gamma = \delta = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

d) $\delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ und $\gamma = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Kontrolle: $90 + 75 + 105 + 90 = 360$.

Lösung zu Aufgabe 5

Der Umfang ist die Summe aller Seitenlängen.
a) Rechteck: $U = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (7{,}5 + 4) = 2 \cdot 11{,}5 = 23$ cm.
b) Quadrat: $U = 4 \cdot a = 4 \cdot 6{,}2 = 24{,}8$ cm.
c) Raute (vier gleiche Seiten): $U = 4 \cdot 5{,}5 = 22$ cm.
d) Drachen (je zwei gleiche Seiten): $U = 2 \cdot (4 + 6{,}5) = 2 \cdot 10{,}5 = 21$ cm.
e) Parallelogramm: $U = 2 \cdot (9 + 3{,}5) = 2 \cdot 12{,}5 = 25$ cm.
Antwort: 23 cm, 24,8 cm, 22 cm, 21 cm und 25 cm.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Alle Seiten gleich lang: Quadrat ja, Rechteck nein, Raute ja, Drachen nein (nur benachbarte Seiten paarweise gleich).
Diagonalen senkrecht: Quadrat ja, Rechteck nein, Raute ja, Drachen ja.
Diagonalen gleich lang: Quadrat ja, Rechteck ja, Raute nein, Drachen nein.
Vier rechte Winkel: Quadrat ja, Rechteck ja, Raute nein, Drachen nein.
b) Ein Rechteck ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Das Quadrat hat vier rechte Winkel, also erfüllt es die Definition des Rechtecks. Es hat zusätzlich vier gleich lange Seiten; es ist ein besonderes Rechteck.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Vier gleich lange Seiten haben Raute und Quadrat. Gleich lange Diagonalen hat aber nur das Quadrat, denn bei einer schiefen Raute ist eine Diagonale länger. Lösung: Quadrat.
b) Ein Paar paralleler Seiten bedeutet Trapez. Zwei nebeneinanderliegende rechte Winkel hat das rechtwinklige Trapez.
c) Diagonalen, die sich halbieren, hat jedes Parallelogramm. Da sie verschieden lang sind, ist es kein Rechteck; da sie nicht senkrecht stehen, ist es keine Raute. Lösung: allgemeines Parallelogramm.
d) Eine Diagonale als Symmetrieachse und keine parallelen Seiten: Das ist der Drachen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Schritt 1: Zeichne die Strecke $AB = 5$ cm. Schritt 2: Zeichne mit dem Geodreieck in A und in B je eine Senkrechte zu AB. Schritt 3: Trage auf beiden Senkrechten 3 cm ab und markiere D und C. Schritt 4: Verbinde C und D. Kontrolle: CD muss 5 cm lang sein, und auch die Diagonalen AC und BD müssen gleich lang sein.
b) Schritt 1: Zeichne $AB = 4$ cm. Schritt 2: Trage in A den Winkel 60° an und miss auf dem freien Schenkel $AD = 4$ cm ab. Schritt 3: Zeichne Kreisbögen mit 4 cm Radius um B und um D; ihr Schnittpunkt ist C. Schritt 4: Verbinde zum Viereck. Alle vier Seiten sind 4 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Der Rahmen läuft einmal um das Rechteck: $U = 2 \cdot (1{,}20 + 1{,}50) = 2 \cdot 2{,}70 = 5{,}40$ m.
b) Kosten: $5{,}40 \cdot 4{,}80 = 25{,}92$ €.
c) Mit Mittelstrebe: $5{,}40 + 1{,}50 = 6{,}90$ m Leiste.
d) $6{,}90 \cdot 4{,}80 = 33{,}12$ €. Die Strebe allein kostet $1{,}50 \cdot 4{,}80 = 7{,}20$ €, und $25{,}92 + 7{,}20 = 33{,}12$ bestätigt das Ergebnis.
Antwort: Der Rahmen ist 5,40 m lang und kostet 25,92 €; mit Strebe braucht man 6,90 m für 33,12 €.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Umfang des Drachens: $2 \cdot (40 + 65) = 2 \cdot 105 = 210$ cm $= 2{,}1$ m.
b) Die Winkelsumme im Viereck ist $360°$: $360° - 100° - 100° - 60° = 100°$.
c) Randschnur: $2{,}1 \cdot 0{,}35 = 0{,}735$ €, gerundet $0{,}74$ €.
d) Das Band ist 2 m länger: $2{,}1 + 2 = 4{,}1$ m.
Antwort: Die Schnur ist 2,10 m lang und kostet etwa 74 Cent; der vierte Winkel misst $100°$; das Band ist 4,10 m lang.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Zaunlänge = Umfang: $30 + 18 + 22 + 18 = 88$ m.
b) Die beiden nicht parallelen Seiten (Schenkel) sind gleich lang, nämlich je 18 m. Es handelt sich um ein gleichschenkliges Trapez.
c) Kosten: $88 \cdot 28 = 2464$ €.
d) Die 30 m an der Straße fallen weg: $30 \cdot 28 = 840$ € werden gespart. Der Zaun kostet dann nur noch $58 \cdot 28 = 1624$ €.
Antwort: 88 m Zaun für 2464 €; ohne die Straßenseite spart man 840 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Eine Raute hat vier gleich lange Seiten: $U = 4 \cdot 12 = 48$ cm.
b) Um einen Punkt herum ergeben alle Winkel zusammen einen Vollwinkel von $360°$. Bei Winkeln von $120°$ passen $360° : 120° = 3$ Rauten um den Punkt.
c) Bei Winkeln von $60°$ passen $360° : 60° = 6$ Rauten um einen Punkt; so entsteht der sechszackige Stern.
d) $200 \cdot 0{,}85 = 170$ €.
Antwort: 48 cm Umfang, 3 bzw. 6 Rauten um einen Punkt, 200 Rauten kosten 170 €.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Äußerer Umfang: $2 \cdot (40 + 30) = 140$ cm.
b) Die Leiste ist auf beiden Seiten 4 cm breit, daher wird jedes Außenmaß um $2 \cdot 4 = 8$ cm kleiner: innen $40 - 8 = 32$ cm und $30 - 8 = 22$ cm.
c) Innerer Umfang: $2 \cdot (32 + 22) = 2 \cdot 54 = 108$ cm.
d) $140 - 108 = 32$ cm. Jede der vier Seiten ist innen um 8 cm kürzer, und $4 \cdot 8 = 32$.
Antwort: außen 140 cm, innen 32 cm mal 22 cm mit 108 cm Umfang; der äußere

Umfang ist 32 cm länger.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Umfang eines Tisches: $1{,}2 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 = 3{,}0$ m.
b) Die Winkel an einem Schenkel ergänzen sich zu 180°, daher sind die Winkel an der kurzen Seite $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
c) Legt man zwei Tische mit den langen Seiten aneinander, treffen sich an den Enden je zwei 60°-Winkel zu 120°. Die übrigen vier Ecken haben schon 120°. Also sind alle sechs Innenwinkel 120°; Summe $6 \cdot 120^\circ = 720^\circ$.
d) Die langen Seiten liegen innen aufeinander und gehören nicht mehr zum Rand. Außen bleiben von jedem Tisch die kurze Seite und die zwei Schenkel, alle 0,6 m lang. Das Sechseck hat also sechs gleich lange Seiten.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Umrandung: $2 \cdot (28 + 15) = 2 \cdot 43 = 86$ m.
b) Eine Hälfte ist ein Rechteck von 14 m mal 15 m: $2 \cdot (14 + 15) = 58$ m.
c) Die Diagonale ist länger als die längste Seite (28 m), aber kürzer als der Weg außen herum ($28 + 15 = 43$ m). Eine Zeichnung im Maßstab zeigt etwa 32 m.
d) Farbe: $86 \cdot 0{,}1 = 8{,}6$ l.
Antwort: Die Umrandung ist 86 m lang, eine Hälfte hat 58 m Umfang, die Diagonale misst etwa 32 m, und man braucht 8,6 l Farbe.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Rechteck ohne die gemeinsame 15-m-Seite: $24 + 15 + 24 = 63$ m. Trapez ohne die gemeinsame Seite: $8 + 9 + 8 = 25$ m. Gesamt: $63 + 25 = 88$ m.
b) $88 \cdot 32 = 2816$ €.
c) Das Tor spart 3 m Zaun: $88 - 3 = 85$ m, Preis $85 \cdot 32 = 2720$ €, also 96 € weniger.
d) $\frac{96}{2816} \approx 0{,}034 = 3{,}4\,\%$.
Antwort: Der Zaun ist 88 m lang und kostet 2816 €; mit Tor kostet er 2720 €, das sind etwa 3,4 % weniger.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Wahr. Ein Rechteck hat zwei Paare paralleler, gleich langer Gegenseiten, also ist es ein Parallelogramm (mit zusätzlich rechten Winkeln).
b) Falsch. Gegenbeispiel: Eine Raute mit den Winkeln 60° und 120° hat vier gleiche Seiten, aber keinen rechten Winkel.
c) Wahr. Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten; das Quadrat erfüllt das.
d) Wahr, aber nur in einem Sonderfall: Sind alle vier Seiten des Drachens gleich lang, ist er eine Raute und damit ein Parallelogramm. Ein „gewöhnlicher“ Drachen hat keine parallelen Seiten.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Umfang des Quadrats: $4 \cdot 10 = 40$ cm.
b) Vier rechte Winkel: $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Das entspricht der Winkelsumme jedes Vierecks.
c) Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich:
$45^\circ + 135^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$. Außerdem ergänzen sich benachbarte Winkel zu $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$. Die Winkelsumme stimmt.
d) Kleines Quadrat: $U = 4 \cdot 3{,}5 = 14$ cm.
Antwort: 40 cm, 360°, Winkelsumme bestätigt, 14 cm.

Lösung zu Aufgabe 19

Das Gitter hat 3 waagerechte und 4 senkrechte Linien.
a) Einzelzellen: 2 Zeilen mal 3 Spalten ergeben 6 Rechtecke.
b) Zwei Zellen nebeneinander: In jeder Zeile gibt es 2 solche Paare, also $2 \cdot 2 = 4$. Zwei Zellen übereinander: In jeder der 3 Spalten genau eins, also 3. Zusammen 7.
c) Jedes Rechteck wird durch 2 waagerechte und 2 senkrechte Linien festgelegt. Aus 3 waagerechten Linien kann man 3 Paare wählen, aus 4 senkrechten 6 Paare. Insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Rechtecke.
Kontrolle durch Zählen nach Größe: $6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18$ (1×1, 1×2, 2×1, 1×3, 2×2, 2×3).

Lösung zu Aufgabe 20

a) Im Drachen mit Symmetrieachse AC sind die Winkel an B und D gleich. Es bleiben für beide zusammen $360^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 220^\circ$, also $\beta = \delta = 220^\circ : 2 = 110^\circ$.
b) $50^\circ + 110^\circ + 90^\circ + 110^\circ = 360^\circ$. Die Winkelsumme stimmt.
c) Mit $\gamma = 70^\circ$: $360^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 240^\circ$, also $\beta = \delta = 120^\circ$. Wird γ um 20° kleiner, verteilen sich diese 20° auf zwei Winkel: β und δ wachsen jeweils um 10°.