Lernzettel - Relative Häufigkeit und Zufall

Klasse: Klasse 6

Wie oft fällt eine Sechs beim Würfeln? Mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten beschreibst du den Zufall. Du lernst auch, Daten mit Kennwerten zusammenzufassen.

Einstieg: Wie oft fällt die Sechs?

Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ wartet Jonas schon lange auf eine Sechs. Er würfelt zehnmal und hat keine einzige. Ist der Würfel kaputt? Oder ist das Zufall? Um solche Fragen zu beantworten, sammelt man Daten, zählt, wie oft etwas passiert, und vergleicht Anteile. Du lernst in diesem Kapitel, Daten in Strichlisten und Tabellen zu ordnen, relative Häufigkeiten und Kennwerte wie Mittelwert und Zentralwert zu berechnen, Diagramme zu lesen und die Wahrscheinlichkeit bei einfachen Zufallsexperimenten zu bestimmen. Außerdem erfährst du, warum man bei wenigen Versuchen nichts über einen Würfel sagen kann, bei sehr vielen aber schon.

Daten sammeln: Strichliste und Häufigkeitstabelle

Definition: absolute Häufigkeit

Man notiert jedes Ergebnis mit einem Strich in einer **Strichliste**. Die Anzahl der Striche heißt **absolute Häufigkeit**. Die Gesamtzahl aller Beobachtungen heißt **n**. Die absoluten Häufigkeiten aller Ergebnisse ergeben zusammen n.

Die relative Häufigkeit

Definition: relative Häufigkeit

Die **relative Häufigkeit** gibt den Anteil an der Gesamtzahl an:
$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl } n}$. Man gibt sie als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozent an.

Merke: Kontrolle

Die relativen Häufigkeiten aller Ergebnisse ergeben zusammen immer 1 (also 100 %). Daran prüfst du, ob du dich verrechnet hast.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolut	3	4	2	5	3	3
relativ	15 %	20 %	10 %	25 %	15 %	15 %

So gehst du vor: Relative Häufigkeit bestimmen

1. Zähle die absolute Häufigkeit des Ergebnisses.
2. Bestimme die Gesamtzahl n der Versuche.
3. Teile die absolute Häufigkeit durch n und gib den Anteil als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozent an.
4. Prüfe: Alle relativen Häufigkeiten zusammen ergeben 1.

Beispiel 1: Würfeln

Beim 20-maligen Würfeln fällt die 4 genau 5-mal. Wie groß ist die relative Häufigkeit?

$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$.

Beispiel 2: Klassenumfrage

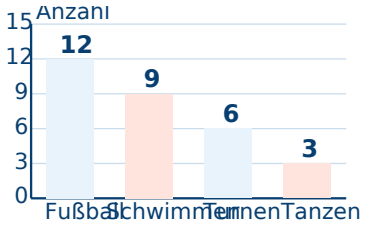
In Klasse 6c (25 Kinder) haben 8 einen Hund, 6 eine Katze, 3 einen Fisch und 8 kein Haustier.

Hund $\frac{8}{25} = 32\,\%$, Katze $\frac{6}{25} = 24\,\%$, Fisch $\frac{3}{25} = 12\,\%$, kein Haustier 32 %. Kontrolle: $32 + 24 + 12 + 32 = 100\,\%$.

Diagramme

Definition: Diagramme

Ein **Säulendiagramm** oder **Balkendiagramm** zeigt Häufigkeiten auf einen Blick. Die Höhe der Säule ist die absolute Häufigkeit. Im **Kreisdiagramm** entspricht der ganze Kreis 100 %, ein Viertel 25 %. Den Winkel eines Kreisabschnitts berechnet man mit relative Häufigkeit mal 360°.



Kennwerte: Mittelwert, Zentralwert, Spannweite

Definition: Mittelwert

Der **Mittelwert** (arithmetisches Mittel) ist die Summe aller Werte geteilt durch ihre Anzahl.

Definition: Zentralwert

Der **Zentralwert** (Median) ist der mittlere Wert, wenn man die Daten der Größe nach ordnet. Bei gerader Anzahl nimmt man den Mittelwert der beiden mittleren Werte.

Definition: Spannweite

Die **Spannweite** ist der Unterschied zwischen größtem und kleinstem Wert.

Beispiel 3: Kennwerte

Gegeben sind 5, 8, 7, 4, 6. Berechne Mittelwert und Zentralwert. Bestimme den Median von 2, 4, 6, 8 und die Spannweite von 3, 5, 7, 9, 11.

Mittelwert: $(5+8+7+4+6):5=30:5=6$. Geordnet: 4, 5, 6, 7, 8, der Zentralwert ist 6. Für 2, 4, 6, 8 ist der Median $(4+6):2=5$. Spannweite von 3, 5, 7, 9, 11: $11-3=8$.

Zufallsexperimente

Definition: Zufallsexperiment

Bei einem **Zufallsexperiment** kann man das Ergebnis nicht sicher vorhersagen, auch wenn man alle möglichen Ergebnisse kennt. Beispiele: Würfeln, Münzwurf, Ziehen einer Kugel aus einer Urne, Drehen eines Glücksrades.

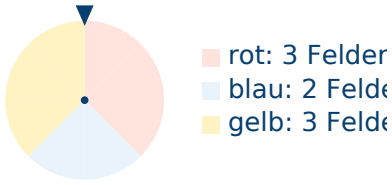
Hinweis

Ein Experiment, bei dem das Ergebnis immer feststeht (Wasser kocht bei Normaldruck bei 100 °C), ist kein Zufallsexperiment.

Wahrscheinlichkeit

Definition: Wahrscheinlichkeit

Die **Wahrscheinlichkeit** beschreibt, wie sicher ein Ergebnis eintritt. Sie liegt zwischen 0 (unmöglich) und 1 (sicher).



Regel: Gleich wahrscheinliche Ergebnisse

Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, gilt
$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$.

Beispiel 4: Würfel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine 6, für eine gerade Zahl, für eine 7 und für eine Zahl kleiner als 7?

Es gibt 6 mögliche Ergebnisse. $P(6) = \frac{1}{6}$, $P(\text{gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Die Augenzahl 7 ist unmöglich (0), eine Zahl kleiner als 7 ist sicher (1).

Beispiel 5: Urne

In einer Urne liegen 5 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Bestimme P(rot), P(blau) und P(nicht grün).

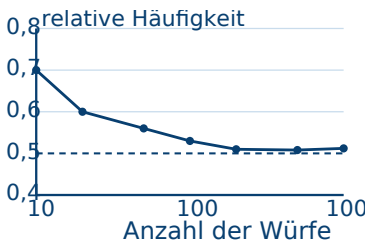
Es gibt 10 gleich wahrscheinliche Ergebnisse. $P(\text{rot}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(\text{blau}) = \frac{3}{10}$, $P(\text{nicht grün}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.



Das Gesetz der großen Zahlen

Satz: Gesetz der großen Zahlen

Je häufiger man ein Zufallsexperiment wiederholt, desto mehr nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit an. Bei wenigen Versuchen sind große Abweichungen normal.



Beispiel 6: Münzwurf

Wirft man eine Münze 10-mal, kann 7-mal Wappen fallen. Was erwartet man

bei 1000 Würfen?

Bei 10 Würfen sind 70 % möglich. Bei 1000 Würfen liegt die relative Häufigkeit sehr nahe bei 50 %.

Beispiel 7: Prognose

Eine Reißzwecke wird 100-mal geworfen, 58-mal landet sie mit der Spitze nach oben. Was erwartet man bei 500 Würfen?

Relative Häufigkeit: 58 %. Erwartet werden etwa $0{,}58 \cdot 500 = 290$ Würfe mit der Spitze nach oben. Das ist eine Schätzung, kein sicheres Ergebnis.

Absolute und relative Häufigkeit im Vergleich

Definition: Häufigkeiten

Die **absolute Häufigkeit** H gibt an, wie oft ein Ergebnis vorkommt. Die **relative Häufigkeit** h ist der Anteil an allen n Versuchen: $h = \frac{H}{n}$. Man kann sie als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozent angeben. Alle relativen Häufigkeiten zusammen ergeben 1, also $100\,\%$.

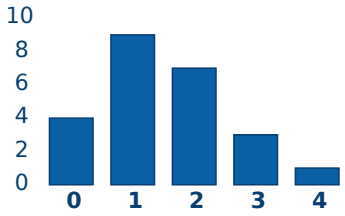
Beispiel 8: Umfrage in zwei Klassen

In der Klasse 6a (25 Kinder) mögen 10 Kinder Pizza am liebsten, in der Klasse 6b (40 Kinder) sind es 14. In welcher Klasse ist Pizza beliebter?

Absolut hat die 6b mehr ($14 > 10$), aber die Klassen sind verschieden groß. Relativ: 6a $\frac{10}{25} = 0{,}40 = 40\,\%$, 6b $\frac{14}{40} = 0{,}350 = 35\,\%$. In der 6a ist Pizza beliebter.

Diagramme lesen

Das Säulendiagramm zeigt, wie viele Geschwister die Kinder einer Klasse haben. Die Höhe jeder Säule ist die absolute Häufigkeit. Achte beim Lesen auf drei Dinge: Beginnt die senkrechte Achse bei 0? Sind die Achsen beschriftet? Welche Gesamtzahl steht hinter dem Diagramm?



Beispiel 9: Diagramm auswerten

Wie viele Kinder gibt es insgesamt, und welcher Anteil hat genau ein

Geschwister?

Summe der Säulen: $4 + 9 + 7 + 3 + 1 = 24$ Kinder. Genau ein Geschwister: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$.

Mittelwert, Zentralwert und Modalwert

Definition: Kennwerte

Der **Mittelwert** ist die Summe aller Werte geteilt durch ihre Anzahl. Der **Zentralwert** (Median) ist der mittlere Wert der der Größe nach geordneten Liste; bei gerader Anzahl nimmst du den Mittelwert der beiden mittleren Zahlen. Der **Modalwert** ist der Wert, der am häufigsten vorkommt. Die **Spannweite** ist der größte Wert minus der kleinste Wert.

Beispiel 10: Alle Kennwerte

Bestimme alle Kennwerte für die Liste $4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9$.

Mittelwert: $(4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 9) : 6 = 6$. Zentralwert: Die mittleren Werte sind 5 und 6, also $(5 + 6) : 2 = 5{,}5$. Modalwert: 5 (kommt zweimal vor). Spannweite: $9 - 4 = 5$.

Beispiel 11: Ausreißer

Fünf Kinder haben so viel Taschengeld pro Woche: $5,\ 5,\ 6,\ 8,\ 30$ €. Welcher Kennwert beschreibt die Gruppe besser, Mittelwert oder Zentralwert?

Mittelwert: $54 : 5 = 10{,}8$ €. Zentralwert: 6 €. Der Wert 30 € ist ein Ausreißer und zieht den Mittelwert nach oben. Fast alle Kinder haben weniger als 10 €. Der Zentralwert 6 € beschreibt die Gruppe besser.

Wahrscheinlichkeit bei fairen Zufallsexperimenten

Regel: Laplace-Wahrscheinlichkeit

Hat ein Zufallsexperiment lauter gleich wahrscheinliche Ergebnisse (Laplace-Experiment), dann gilt für ein Ereignis E: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$. Die Wahrscheinlichkeit liegt immer zwischen 0 (unmöglich) und 1 (sicher).

Beispiel 12: Würfeln

Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelst du eine gerade Zahl?

Günstig sind $2,\ 4,\ 6$, also 3 Ergebnisse. Möglich sind 6. $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Beispiel 13: Glücksrad

Ein Glücksrad hat 8 gleich große Felder, davon 3 rote. Wie wahrscheinlich ist Rot?

$P(\text{rot}) = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$.

Regel: Gegenereignis

Das Gegenereignis zu „E tritt ein“ ist „E tritt nicht ein“. Es gilt $P(\text{nicht } E) = 1 - P(E)$. Das ist oft der kürzere Weg.

Beispiel 14: Kugeln ziehen

In einer Urne liegen 5 rote, 3 blaue und 2 gelbe Kugeln. Wie wahrscheinlich ist es, keine blaue Kugel zu ziehen?

$P(\text{blau}) = \frac{3}{10}$. Gegenereignis: $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. Probe: $5 + 2 = 7$ günstige Kugeln von 10, also $\frac{7}{10}$.

Das Gesetz der großen Zahlen

Bei wenigen Versuchen schwankt die relative Häufigkeit stark. Wirfst du eine Münze 10-mal, kann Zahl 7-mal fallen ($70\,\%$). Bei 1000 Würfen liegt die relative Häufigkeit sehr nahe bei $50\,\%$. Je mehr Versuche du machst, desto näher kommt die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit. Das nennt man das **Gesetz der großen Zahlen**. Es gilt aber nicht für das nächste Ergebnis: Die Münze „merkt“ sich nicht, was vorher passiert ist.

Achtung: Typische Fehler

Eine hohe absolute Häufigkeit sagt nichts, wenn die Gesamtzahlen verschieden sind: Vergleiche Anteile. Der Mittelwert muss kein Wert aus der Liste sein. Den Zentralwert bestimmst du erst nach dem Ordnen der Zahlen. Nach fünfmal Zahl ist die Wahrscheinlichkeit für Zahl beim nächsten Wurf immer noch $\frac{1}{2}$, nicht niedriger. Wahrscheinlichkeiten dürfen nie größer als 1 sein.

Wusstest du schon?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand 1654 aus einem Briefwechsel der französischen Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat. Ein Spieler hatte sie gefragt, wie man den Einsatz eines abgebrochenen Würfelspiels gerecht aufteilt. Heute braucht man Wahrscheinlichkeiten für Wettervorhersagen, Versicherungen und Medikamentenstudien.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Absolute Häufigkeit H zählt, relative Häufigkeit $h = \frac{H}{n}$ gibt den Anteil an; alle h zusammen ergeben 1.

- Daten ordnest du in Strichliste und Häufigkeitstabelle; im Säulendiagramm ist die Höhe die absolute Häufigkeit.
- Mittelwert: Summe durch Anzahl. Zentralwert: mittlerer Wert der geordneten Liste. Modalwert: häufigster Wert. Spannweite: Maximum minus Minimum.
- Ausreißer verfälschen den Mittelwert stark, der Zentralwert bleibt stabiler.
- Laplace-Experiment: $P(E) = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}}$, immer zwischen 0 und 1.
- Gegenereignis: $P(\text{nicht } E) = 1 - P(E)$.
- Gesetz der großen Zahlen: Bei vielen Versuchen nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit; vorherige Würfe haben keinen Einfluss auf den nächsten.

Achtung

Absolute und relative Häufigkeit nicht verwechseln: Die relative Häufigkeit ist ein Anteil. Teile immer durch die Gesamtzahl n. Der Zufall hat kein Gedächtnis: Nach 5-mal Wappen ist die Chance für Wappen beim nächsten Wurf trotzdem $\frac{1}{2}$. Eine Wahrscheinlichkeit ist nie größer als 1. Ordne die Daten, bevor du den Median bestimmst.

Ottos Tipp

Prüfe bei jeder Häufigkeitstabelle, ob die absoluten Häufigkeiten zusammen n und die relativen zusammen 100 % ergeben. Bei Zufallsexperimenten hilft eine Liste aller Möglichkeiten, damit du kein Ergebnis vergisst.