Lösungen - Relative Häufigkeit und Zufall

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir gehen die Liste der Reihe nach durch und machen für jeden Wurf einen Strich bei der passenden Augenzahl. Fünf Striche bündeln wir als Fünferpäckchen. Ergebnis: Augenzahl 1: 4-mal, 2: 4-mal, 3: 5-mal, 4: 4-mal, 5: 5-mal, 6: 8-mal.
b) $4 + 4 + 5 + 4 + 5 + 8 = 30$. Die Summe stimmt mit der Zahl der Würfe überein, also wurde kein Wurf vergessen.
c) Am häufigsten kam die Sechs vor, nämlich 8-mal.
d) Am seltensten kamen die Eins, die Zwei und die Vier vor, jeweils 4-mal. Bei nur 30 Würfen sind solche Unterschiede Zufall.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Relative Häufigkeit = absolute Häufigkeit geteilt durch die Gesamtzahl 25. Für Prozent erweitern wir mit 4 auf Hundertstel.
Hund $\frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\,\%$; Katze $\frac{7}{25} = 28\,\%$; Hase $\frac{4}{25} = 16\,\%$; Fisch $\frac{3}{25} = 12\,\%$; Andere $\frac{2}{25} = 8\,\%$.
b) $\frac{9+7+4+3+2}{25} = \frac{25}{25} = 1$, in Prozent $36 + 28 + 16 + 12 + 8 = 100\,\%$.
c) Doppelt so beliebt wie der Fisch hieße 6 Stimmen beziehungsweise 24 %. Kein Tier hat genau diesen Wert. Am nächsten kommt die Katze mit 7 Stimmen, der Hase liegt mit 4 Stimmen darunter.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Gesamtzahl 50. Fußball $\frac{18}{50} = 0{,}36$; Schwimmen $\frac{12}{50} = 0{,}24$; Radfahren $\frac{10}{50} = 0{,}20$; andere $\frac{10}{50} = 0{,}20$. Trick: Mit 2 erweitern ergibt Hundertstel, zum Beispiel $\frac{18}{50} = \frac{36}{100}$.
b) In Prozent: 36 %, 24 %, 20 % und 20 %; zusammen 100 %.
c) Wenn die Anteile gleich bleiben, wählen 24 % von 200 Kindern Schwimmen: $0{,}24 \cdot 200 = 48$ Kinder.
Antwort: 48 von 200 Kindern würden Schwimmen wählen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wir lesen die Säulenhöhen ab: 0 Geschwister 4 Kinder, 1 Geschwister 9, 2 Geschwister 7, 3 Geschwister 3, 4 Geschwister 1. Zusammen $4 + 9 + 7 + 3 + 1 = 24$ Kinder.
b) „Mindestens zwei“ heißt 2, 3 oder 4 Geschwister: $7 + 3 + 1 = 11$ Kinder.
c) Kein Geschwister haben 4 von 24 Kindern: $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 = 16{,}7\,\%$.
d) Die höchste Säule gehört zu einem Geschwister (9 Kinder). Das ist der Modalwert.

Lösung zu Aufgabe 5

Mittelwert = Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl der Werte.
a) $12 + 15 + 9 + 18 + 11 = 65$; fünf Werte: $65 : 5 = 13$ Punkte.
b) $14 + 16 + 15 + 19 + 21 + 15 + 12 = 112$; sieben Werte: $112 : 7 = 16$ °C.
c) $148 + 152 + 150 + 146 = 596$; vier Werte: $596 : 4 = 149$ cm.
Kontrolle: Der Mittelwert liegt immer zwischen dem kleinsten und dem größten Wert, zum Beispiel bei a) zwischen 9 und 18.

Lösung zu Aufgabe 6

Zentralwert (Median): der Wert in der Mitte der geordneten Liste; bei gerader Anzahl der Mittelwert der beiden mittleren Werte. Spannweite: größter minus kleinster Wert.
a) Geordnet: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12. Bei 7 Werten ist der 4. Wert die Mitte: Zentralwert 6. Spannweite $12 - 3 = 9$.
b) Geordnet: 18, 19, 20, 22, 25, 30. Bei 6 Werten liegen der 3. und 4. Wert in der Mitte: $(20 + 22) : 2 = 21$. Spannweite $30 - 18 = 12$.
Antwort: a) Zentralwert 6, Spannweite 9; b) Zentralwert 21, Spannweite 12.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $3 + 7 + 9 + 4 + 2 = 25$ Kinder.
b) Der Modalwert ist der häufigste Wert: Die Note 3 kommt 9-mal vor.
c) Wir multiplizieren jede Note mit ihrer Häufigkeit:
$3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 3 + 14 + 27 + 16 + 10 = 70$. Durchschnitt:
$70 : 25 = 2{,}8$.
d) Bei 25 Kindern steht das 13. Kind in der Mitte. Kinder 1 bis 3 haben die Note 1, Kinder 4 bis 10 die Note 2, Kinder 11 bis 19 die Note 3. Das 13. Kind hat die Note 3, also ist der Zentralwert 3.

Lösung zu Aufgabe 8

Bei einem Laplace-Experiment gilt: Wahrscheinlichkeit = Anzahl günstiger Ergebnisse geteilt durch Anzahl aller Ergebnisse. Ein Würfel hat 6 gleich wahrscheinliche Ergebnisse.
a) Günstig ist nur die 5: $P = \frac{1}{6}$.
b) Größer als 4 sind 5 und 6: $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
c) Primzahlen 2, 3, 5: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
d) Eine Münze hat 2 gleich wahrscheinliche Seiten: $P(\text{Wappen}) = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Alle 10 Felder sind gleich groß. Rot $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, blau $\frac{3}{10}$, gelb $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, grün $\frac{1}{10}$. Summe: $\frac{10}{10} = 1$.
b) „Rot oder gelb“: $4 + 2 = 6$ günstige Felder, $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
c) „Nicht blau“ ist das Gegenereignis zu „blau“: $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

d) Erwartungswert für grün: $\frac{1}{10} \cdot 200 = 20$. Man erwartet etwa 20-mal grün; genau 20 ist wegen des Zufalls nicht sicher.

Lösung zu Aufgabe 10

Insgesamt liegen $5 + 3 + 2 = 10$ Kugeln in der Urne.
a) $P(\text{rot}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
b) Blau oder gelb: $\frac{3+2}{10} = \frac{1}{2}$. Das ist das Gegenereignis zu Rot, und $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
c) Kommen x blaue Kugeln dazu, gilt $\frac{3+x}{10+x} = \frac{1}{2}$, also $2(3 + x) = 10 + x$,
$6 + 2x = 10 + x$, $x = 4$. Probe: 7 blaue von 14 Kugeln, $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.
d) Man muss die 3 blauen Kugeln entfernen; dann liegen nur noch 5 rote und 2 gelbe Kugeln in der Urne.

Lösung zu Aufgabe 11

Das Gegenereignis umfasst alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis gehören. Es gilt $P(\text{nicht } E) = 1 - P(E)$.
a) $P(\text{Sechs}) = \frac{1}{6}$, also $P(\text{keine Sechs}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
b) Gerade Zahlen 2, 4, 6: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Keine gerade Zahl: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; das sind die Zahlen 1, 3, 5.
c) Bei einem einzigen Wurf bedeutet „mindestens eine 1“ genau „eine 1“: $P = \frac{1}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Relative Häufigkeit = Anzahl „Zahl“ geteilt durch Anzahl Würfe. 10 Würfe: $\frac{7}{10} = 70\,\%$. 50 Würfe: $\frac{27}{50} = 54\,\%$. 200 Würfe: $\frac{108}{200} = 54\,\%$. 1000 Würfe: $\frac{496}{1000} = 49{,}6\,\%$.
b) Bei einer fairen Münze sind beide Seiten gleich wahrscheinlich: $P = \frac{1}{2} = 50\,\%$.
c) Die kurze Serie mit 10 Würfen weicht mit 70 % um 20 Prozentpunkte am stärksten ab.
d) Gesetz der großen Zahlen: Je öfter man wirft, desto näher liegt die relative Häufigkeit an der Wahrscheinlichkeit. Bei 1000 Würfen beträgt die Abweichung nur noch 0,4 Prozentpunkte.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Summe $0 + 2 + 5 + 0 + 3 + 1 + 0 + 12 + 2 + 5 = 30$; Mittelwert $30 : 10 = 3$ min.
b) Geordnet: 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 12. Die beiden mittleren Werte (5. und 6.) sind 2 und 2, Zentralwert 2 min.
c) Modalwert: 0 min (dreimal). Spannweite: $12 - 0 = 12$ min.
d) Der eine Tag mit 12 min Verspätung ist ein Ausreißer und zieht den Mittelwert nach oben. An 7 von 10 Tagen war die Verspätung kleiner als 3 min. Der Zentralwert von 2 min beschreibt einen typischen Tag deshalb besser.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Geordnet: 142, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 150, 151, 152, 155.

b) Summe 1779 cm; Mittelwert $1779 : 12 = 148{,}25$, auf Zehntel gerundet $148{,}3$ cm.
c) Bei 12 Werten liegen der 6. und 7. Wert in der Mitte: 148 und 149. Zentralwert $(148 + 149) : 2 = 148{,}5$ cm.
d) Spannweite: $155 - 142 = 13$ cm.
Mittelwert und Zentralwert liegen hier nahe beieinander, weil es keine starken Ausreißer gibt.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Summe $2 + 0 + 3 + 1 + 1 + 4 + 2 + 0 + 2 + 5 = 20$ Tore; Mittelwert $20 : 10 = 2$ Tore pro Spiel.
b) Geordnet: 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5. Die mittleren Werte sind 2 und 2, also Zentralwert 2. Der häufigste Wert ist ebenfalls 2 (dreimal): Modalwert 2.
c) Mindestens drei Tore fielen in den Spielen mit 3, 4 und 5 Toren, also in 3 von 10 Spielen: 30 %.
d) Neue Summe $20 + 8 = 28$, elf Spiele: $28 : 11 \approx 2{,}55$. Der Mittelwert steigt durch das eine Spiel von 2 auf etwa 2,55 Tore.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $17 + 21 + 18 + 23 + 19 + 22 = 120$. Es wurden alle 120 Würfe erfasst.
b) Jeweils durch 120 geteilt und auf drei Stellen gerundet: 1: $0{,}142$; 2: $0{,}175$; 3: $0{,}150$; 4: $0{,}192$; 5: $0{,}158$; 6: $0{,}183$.
c) Bei einem fairen Würfel hat jede Zahl die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; erwartet werden je 20 Würfe. Alle relativen Häufigkeiten liegen zwischen 0,142 und 0,192, also in der Nähe.
d) Nein. Die absoluten Häufigkeiten weichen höchstens um 3 von 20 ab. Solche Schwankungen sind bei 120 Würfen ganz normal; für einen Verdacht bräuchte man viel größere Abweichungen oder mehr Würfe.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Gewinne insgesamt: $1 + 19 + 60 = 80$ von 200 Losen. $P = \frac{80}{200} = \frac{2}{5} = 40\,\%$.
b) Hauptgewinn: $\frac{1}{200} = 0{,}005 = 0{,}5\,\%$.
c) Niete: $\frac{120}{200} = \frac{3}{5} = 60\,\%$. Kontrolle mit dem Gegenereignis: $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
d) Bei 10 Losen erwartet man $10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ Gewinne. Sicher ist das nicht, es können auch mehr oder weniger sein.
Antwort: 40 % Gewinnchance, 0,5 % für den Hauptgewinn, 60 % Nieten, etwa 4 Gewinne bei 10 Losen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) April: $\frac{14}{30} \approx 0{,}4667 = 46{,}7\,\%$. Mai: $\frac{9}{31} \approx 0{,}2903 = 29{,}0\,\%$. Juni: $\frac{11}{30} \approx 0{,}3667 = 36{,}7\,\%$.
b) Relativ am häufigsten regnete es im April. Weil die Monate verschieden lang sind, vergleicht man die relativen und nicht die absoluten Häufigkeiten.
c) Zusammen: $14 + 9 + 11 = 34$ Regentage von 91 Tagen: $\frac{34}{91} \approx 37{,}4\,\%$.

d) Gegenereignis „kein Regen“: $1 - \frac{34}{91} = \frac{57}{91} \approx 62{,}6\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Bei fünf Werten und Mittelwert 13 muss die Summe $5 \cdot 13 = 65$ sein. Bisher: $12 + 15 + 9 + 14 = 50$. Das fünfte Ergebnis ist $65 - 50 = 15$ Punkte. Probe: $65 : 5 = 13$.
b) Geordnet sind die Werte 9, 12, 14, 15. Bei fünf Werten ist der Zentralwert der dritte Wert. Damit 12 an dritter Stelle steht, muss der neue Wert x höchstens 12 sein, zum Beispiel $x = 10$: 9, 10, 12, 14, 15. Jeder Wert $x \leq 12$ passt.
c) Nein. Der Mittelwert gleicht die Werte aus; er liegt immer zwischen dem kleinsten und dem größten Wert. Wären alle Zahlen kleiner als der Mittelwert, wäre auch ihre Summe kleiner als fünfmal der Mittelwert, ein Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 20

a) A gewinnt bei 1 oder 2: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. B gewinnt bei 3, 4, 5 oder 6: $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
b) Das Spiel ist nicht fair. B gewinnt doppelt so oft wie A, bei gleicher Zahlung verliert A auf lange Sicht Geld.
c) A muss im Gewinnfall doppelt so viel bekommen: Gewinnt A, zahlt B 2 €; gewinnt B, zahlt A 1 €. In 3 Spielen gewinnt A im Mittel einmal (+2 €) und verliert zweimal (−2 €). Auf lange Sicht gleichen sich Gewinne und Verluste aus, das Spiel ist fair.