Lernzettel - Rechnen mit Dezimalzahlen

Klasse: Klasse 6

Mit Dezimalzahlen rechnest du fast wie mit ganzen Zahlen. Du musst nur das Komma richtig behandeln. Hier lernst du alle vier Rechenarten.

Einstieg: Der Einkaufszettel

Auf Merles Einkaufszettel stehen Brot für $2{,}49$ €, drei Joghurts zu je $0{,}65$ €, ein Kilogramm Äpfel für $1{,}99$ € und $0{,}75$ kg Käse, das Kilogramm zu $11{,}80$ €. Sie hat einen Zwanzig-Euro-Schein dabei. Reicht das Geld, und wie viel Wechselgeld bekommt sie? Solche Rechnungen musst du im Alltag ständig machen, an der Kasse, an der Tankstelle, beim Messen und beim Sport. Dafür brauchst du sichere Verfahren zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Dezimalzahlen. In diesem Kapitel lernst du diese Verfahren, wie du das Komma richtig setzt, wie du mit einem Überschlag Fehler vermeidest und wie du geschickt rechnest.

Addieren und Subtrahieren

Regel: Komma unter Komma

Beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren schreibt man die Zahlen so untereinander, dass **Komma unter Komma** steht. Fehlende Stellen füllt man mit Nullen auf. Man rechnet wie bei ganzen Zahlen von rechts nach links und setzt das Komma im Ergebnis an dieselbe Stelle.

Beispiel 1: Addieren und Subtrahieren

Berechne $3{,}45 + 2{,}80$ und $10{,}00 - 4{,}65$.

$3{,}45 + 2{,}80 = 6{,}25$ und $10{,}00 - 4{,}65 = 5{,}35$.

Beispiel 2: Einkauf

Drei Hefte kosten je 1,45 €. Du bezahlst mit einem 5-€-Schein. Wie viel Rückgeld bekommst du?

$3 \cdot 1{,}45\,€ = 4{,}35\,€$. Rückgeld: $5{,}00 - 4{,}35 = 0{,}65\,€$.

Multiplizieren

So gehst du vor: Dezimalzahlen multiplizieren

1. Multipliziere, ohne das Komma zu beachten, als wären es ganze Zahlen.
2. Zähle die Nachkommastellen beider Faktoren zusammen.

3. Setze das Komma im Ergebnis so, dass es so viele Nachkommastellen hat.
4. Prüfe mit einem Überschlag.

Beispiel 3: Komma zählen

Berechne $2{,}4 \cdot 1{,}5$ und $0{,}12 \cdot 0{,}3$.

$24 \cdot 15 = 360$ mit zwei Nachkommastellen, also $3{,}60 = 3{,}6$. $12 \cdot 3 = 36$ mit 2 + 1 = 3 Nachkommastellen, also $0{,}036$. Fehlende Stellen füllt man vorne mit Nullen auf.

Beispiel 4: Schriftlich

Berechne $4{,}8 \cdot 2{,}9$.

$48 \cdot 29 = 48 \cdot 20 + 48 \cdot 9 = 960 + 432 = 1392$. Beide Faktoren haben eine Nachkommastelle, das Ergebnis hat zwei: 13,92. Überschlag: $5 \cdot 3 = 15$, das passt.

Hinweis

Multiplikation mit 10, 100 und 1000 ist besonders einfach: Das Komma wandert um 1, 2 oder 3 Stellen nach rechts. Aus $4{,}56 \cdot 100$ wird 456.

Dividieren

So gehst du vor: Durch eine natürliche Zahl dividieren

1. Teile wie bei ganzen Zahlen.
2. Sobald du das Komma des Dividenden überschreitest, setze im Ergebnis das Komma.
3. Bleibt ein Rest, hänge Nullen an und teile weiter.

Beispiel 5: Division durch ganze Zahl

Berechne $7{,}2 : 4$ und $13 : 4$.

$7 : 4 = 1$ Rest 3, dann Komma, $32 : 4 = 8$, also 1,8. Ebenso $13 : 4 = 3{,}25$.

So gehst du vor: Durch eine Dezimalzahl dividieren

1. Verschiebe bei **beiden** Zahlen das Komma um gleich viele Stellen nach rechts, bis der Teiler eine ganze Zahl ist.
2. Der Wert des Quotienten ändert sich dabei nicht.
3. Rechne dann wie bei einer Division durch eine natürliche Zahl.

Beispiel 6: Durch Dezimalzahl

Berechne $2{,}4 : 0{,}06$.

Komma um zwei Stellen verschieben: $240 : 6 = 40$.

Überschlag und Rechenvorteile

Regel: Überschlag

Vor dem Rechnen schätzt man das Ergebnis mit gerundeten Zahlen. Das schützt vor Kommafehlern: $4{,}8 \cdot 2{,}9 \approx 5 \cdot 3 = 15$, also kann das Ergebnis nicht 139,2 sein, sondern nur 13,92. Bei Divisionen, die nicht aufgehen, rundet man am Ende, zum Beispiel $10 : 3 \approx 3{,}33$.

Beispiel 7: Geschickt rechnen

Berechne $3{,}07 + 0{,}93 + 2{,}5$ geschickt. Was ist $12{,}5 \cdot 0{,}08$?

$3{,}07 + 0{,}93 + 2{,}5 = (3{,}07 + 0{,}93) + 2{,}5 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5$. Wegen $12{,}5 \cdot 8 = 100$ ist $12{,}5 \cdot 0{,}08 = 1$.

Hinweis

Mit 0,5 malzunehmen heißt halbieren, durch 0,5 zu teilen heißt verdoppeln. Mit 0,1 malzunehmen heißt, durch 10 zu teilen.

Anwendungen

Beispiel 8: Taxi

Ein Taxi kostet 3,50 € Grundgebühr und 1,80 € je Kilometer. Was kostet eine Fahrt von 7 km?

$7 \cdot 1{,}80 = 12{,}60\,€$, dazu die Grundgebühr: $12{,}60 + 3{,}50 = 16{,}10\,€$. Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Beispiel 9: Durchschnitt

Mittagstemperaturen an fünf Tagen: 12,4 °C; 15,1 °C; 13,8 °C; 14,9 °C; 14,3 °C. Wie groß ist der Durchschnitt?

Summe: 70,5 °C. Durchschnitt: $70{,}5 : 5 = 14{,}1$ °C. Der Mittelwert ist die Summe geteilt durch die Anzahl der Werte.

Schriftlich addieren und subtrahieren

So gehst du vor: Dezimalzahlen untereinander rechnen

1. Schreibe die Zahlen so untereinander, dass Komma unter Komma steht.
2. Fülle fehlende Stellen mit Nullen auf, damit beide Zahlen gleich viele Nachkommastellen haben.
3. Rechne von rechts nach links wie bei natürlichen Zahlen und denke an den Übertrag.
4. Setze im Ergebnis das Komma unter die anderen Kommas.

Beispiel 10: Addieren mit verschiedenen Stellenzahlen

Berechne $12{,}5 + 3{,}478$.

Ergänze Nullen: $12{,}500 + 3{,}478$. Tausendstel: $0 + 8 = 8$. Hundertstel: $0 + 7 = 7$. Zehntel: $5 + 4 = 9$. Einer: $2 + 3 = 5$. Zehner: 1. Ergebnis: $15{,}978$. Überschlag: $12{,}5 + 3{,}5 = 16$, das passt.

Beispiel 11: Subtrahieren von einer ganzen Zahl

Berechne $20 - 7{,}85$.

Schreibe $20{,}00 - 7{,}85$. Von rechts: $0 - 5$ geht nicht, entbündeln: $10 - 5 = 5$. Dann $9 - 8 = 1$ (nach dem Borgen), $9 - 7 = 2$, und vorne 1. Ergebnis: $12{,}15$. Probe durch Addieren: $7{,}85 + 12{,}15 = 20$.

Schriftlich multiplizieren

So gehst du vor: Dezimalzahlen multiplizieren

1. Streiche gedanklich die Kommas und multipliziere die beiden Zahlen wie natürliche Zahlen.
2. Zähle die Nachkommastellen beider Faktoren zusammen.
3. Setze im Ergebnis das Komma so, dass es genau so viele Nachkommastellen hat.
4. Prüfe mit einem Überschlag, ob die Größenordnung stimmt.

Beispiel 12: Komma setzen beim Multiplizieren

Berechne $3{,}4 \cdot 2{,}15$ und $0{,}06 \cdot 0{,}4$.

$34 \cdot 215 = 7310$. Die Faktoren haben $1 + 2 = 3$ Nachkommastellen, also $7{,}310 = 7{,}31$. Bei $6 \cdot 4 = 24$ haben die Faktoren $2 + 1 = 3$ Nachkommastellen: $0{,}024$. Ergänze vorn Nullen, wenn Stellen fehlen: $0{,}06 \cdot 0{,}4 = 0{,}024$.

Schriftlich dividieren

Regel: Erst den Divisor zur ganzen Zahl machen

Bei der Division durch eine Dezimalzahl verschiebst du das Komma in beiden Zahlen

um gleich viele Stellen nach rechts, bis der Divisor eine ganze Zahl ist. Das Ergebnis ändert sich dadurch nicht, denn $7{,}56 : 0{,}6 = 75{,}6 : 6$. Dann rechnest du wie gewohnt und setzt das Komma im Ergebnis, sobald du über das Komma des Dividenden hinwegkommst.

Beispiel 13: Division durch eine Dezimalzahl

Berechne $7{,}56 : 0{,}6$ und $5 : 8$.

Erste Aufgabe: Komma um eine Stelle verschieben: $75{,}6 : 6 = 12{,}6$. Zweite Aufgabe: $5 : 8$, also $5{,}000 : 8$: $50 : 8 = 6$ Rest 2, $20 : 8 = 2$ Rest 4, $40 : 8 = 5$. Ergebnis $0{,}625$.

Überschlag und Rechenvorteile

Der Überschlag ist deine Kontrolle gegen Kommafehler. Dafür rundest du alle Zahlen auf leicht zu rechnende Werte, rechnest damit und vergleichst das Ergebnis mit deiner genauen Rechnung. Rechenvorteile sparen Arbeit, zum Beispiel bei Aufgaben, in denen die Zahlen gut zueinander passen.

Beispiel 14: Überschlag

Prüfe mit einem Überschlag: $4{,}89 \cdot 2{,}1 = 10{,}269$.

Runde: $4{,}89 \approx 5$ und $2{,}1 \approx 2$. Überschlag: $5 \cdot 2 = 10$. Das genaue Ergebnis $10{,}269$ liegt nahe bei 10, also passt es.

Beispiel 15: Geschickt rechnen

Berechne vorteilhaft: $0{,}25 \cdot 37{,}6 \cdot 4$ und $5{,}6 \cdot 9{,}9$.

Vertausche: $0{,}25 \cdot 4 = 1$, also $1 \cdot 37{,}6 = 37{,}6$. Zweite Aufgabe: $9{,}9 = 10 - 0{,}1$, also $5{,}6 \cdot 10 - 5{,}6 \cdot 0{,}1 = 56 - 0{,}56 = 55{,}44$.

Quotienten runden

Beispiel 16: Wenn die Division nicht aufgeht

Drei Freunde teilen 10 € gerecht. Wie viel bekommt jeder?

$10 : 3 = 3{,}333\ldots$ Die Division geht nie auf. Für Geld rundest du auf Cent (zwei Stellen): $3{,}33$ € pro Person. Insgesamt $3 \cdot 3{,}33 = 9{,}99$ €, es bleibt 1 ct übrig.

Anwendung: Wechselgeld

Beispiel 17: An der Kasse

Merle kauft drei Hefte zu je $1{,}35$ € und einen Stift für $2{,}80$ €. Sie zahlt mit 20 €. Wie viel Wechselgeld bekommt sie?

Hefte: $3 \cdot 1{,}35 = 4{,}05$ €. Zusammen mit dem Stift: $4{,}05 + 2{,}80 = 6{,}85$ €. Wechselgeld: $20 - 6{,}85 = 13{,}15$ €.

Achtung: Typische Fehler

Beim Addieren und Subtrahieren muss Komma unter Komma stehen, sonst werden Zehntel mit Hundertsteln verwechselt. Beim Multiplizieren wird das Komma nicht „mitgeschoben“, sondern aus der Summe der Nachkommastellen bestimmt. Eine Multiplikation mit einer Zahl kleiner als 1 macht das Ergebnis kleiner: $0{,}5 \cdot 8 = 4$. Bei der Division durch eine Dezimalzahl wird das Komma in beiden Zahlen verschoben, nicht nur in einer. Vergiss nie den Überschlag: Wenn er deutlich vom Ergebnis abweicht, ist wahrscheinlich das Komma falsch gesetzt.

Wusstest du schon?

Der Taschenrechner rechnet intern mit sehr vielen Nachkommastellen, zeigt aber nur die ersten an. Deshalb ergibt zum Beispiel eine Division wie 10 geteilt durch 3 auf dem Display 3,333333. Auch die Kasse im Supermarkt rundet immer auf ganze Cent, denn kleinere Münzen als einen Cent gibt es nicht.

Einstiegsaktivität: Kassenzettel prüfen

Nimm einen echten Kassenzettel aus dem Supermarkt. Rechne nach, ob die Summe stimmt. Schreibe dazu alle Preise untereinander, Komma unter Komma, und addiere schriftlich. Mache vorher einen Überschlag, indem du jeden Preis auf ganze Euro rundest. Bei Waren wie Käse oder Obst steht oft ein Preis pro Kilogramm und ein Gewicht wie 0,345 kg auf dem Zettel. Multipliziere beides und runde auf Cent. Du wirst sehen: Die Kasse rechnet genau wie du, nur schneller.

Schon gewusst?

Der Flame Simon Stevin schrieb 1585 ein kleines Buch mit dem Titel „Das Zehntel“. Darin zeigte er, dass man mit Dezimalzahlen genauso einfach rechnen kann wie mit natürlichen Zahlen. Das Komma als Trennzeichen setzte sich in Deutschland erst später durch; in England und den USA schreibt man bis heute einen Punkt, also 3.5 statt 3,5. Achte deshalb beim Taschenrechner darauf, welche Taste das Komma ist.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Addieren und Subtrahieren: Komma unter Komma, fehlende Stellen mit Nullen auffüllen.
- Multiplizieren: ohne Komma rechnen, dann so viele Nachkommastellen setzen, wie beide Faktoren zusammen haben.
- Dividieren: Komma bei Divisor und Dividend gleich weit nach rechts verschieben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist.
- Multiplizieren und Dividieren mit 10, 100, 1000 verschiebt nur das Komma.

- Der Überschlag mit gerundeten Zahlen deckt Kommafehler sofort auf.
- Rechenvorteile nutzen: vertauschen ($0{,}25 \cdot 4 = 1$), zerlegen ($9{,}9 = 10 - 0{,}1$) und Klammern geschickt setzen.
- Wenn eine Division nicht aufgeht, wird sinnvoll gerundet, bei Geld auf Cent.

Achtung

Beim Addieren und Subtrahieren muss Komma unter Komma stehen, besonders bei Zahlen mit verschieden vielen Stellen wie $10 - 4{,}65$. Beim Multiplizieren werden die Nachkommastellen *gezählt*, nicht untereinander ausgerichtet: $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, nicht 0,6. Beim Dividieren durch eine Dezimalzahl musst du beide Kommas gleich weit verschieben. Ohne Überschlag übersieht man Kommafehler.

Ottos Tipp

Mal eine Zahl kleiner als 1 macht kleiner, durch eine Zahl kleiner als 1 macht größer. Mit diesen beiden Regeln erkennst du sofort, ob dein Ergebnis in die richtige Richtung geht.