Lernzettel - Multiplikation und Division von Brüchen

Klasse: Klasse 6

Beim Multiplizieren und Dividieren von Brüchen brauchst du keinen gemeinsamen Nenner. Hier lernst du die Regeln, das Kürzen über Kreuz und den Kehrbruch.

Einstieg: Das Milchrezept

Für ein Rezept braucht man $\frac{2}{3}$ Liter Milch. Du willst aber nur $\frac{3}{4}$ des Rezepts backen. Wie viel Milch musst du abmessen? Du musst $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ berechnen, und „von“ bedeutet in der Mathematik „mal“. Bei Brüchen kommt das ständig vor: Ein halber Kuchen, davon ein Drittel, ein Viertel des Wochenendes, ein Fünftel des Weges. Und umgekehrt fragst du auch: Wie oft passt ein Achtel Pizza in drei Viertel? Das ist eine Division. In diesem Kapitel lernst du, Brüche zu multiplizieren und zu dividieren, mit gemischten Zahlen zu rechnen und Sachaufgaben zu lösen.

Bruch mal natürliche Zahl

Regel: Bruch mal natürliche Zahl

Beim Vervielfachen eines Bruches mit einer natürlichen Zahl multipliziert man nur den Zähler. Der Nenner bleibt, denn die Größe der Teile ändert sich nicht:
$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Bruch mal Bruch

Regel: Bruch mal Bruch

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Merke: Das Wort „von“

Das Wort „von“ bedeutet in Aufgaben fast immer „mal“: $\frac{3}{4}$ von 20 kg ist $\frac{3}{4} \cdot 20\,\text{kg} = 15\,\text{kg}$. Anschaulich: Ein Rechteck aus 3 Spalten und 4 Zeilen hat 12 Felder. Färbt man $\frac{2}{3}$ der Breite und $\frac{3}{4}$ der Höhe, entsteht ein Rechteck aus $2 \cdot 3 = 6$ von 12 Feldern.

So gehst du vor: Über Kreuz kürzen

1. Prüfe, ob ein Zähler und ein Nenner einen gemeinsamen Teiler haben, auch wenn sie in verschiedenen Brüchen stehen.

2. Teile beide durch diesen Teiler.
3. Multipliziere dann Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.

Beispiel 1: Kürzen vor dem Multiplizieren

Berechne $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}$.

$\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{8:4}{15:5} \cdot \frac{5:5}{12:4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Gemischte Zahlen multiplizieren

Regel: Gemischte Zahlen

Bei Multiplikation und Division wandelt man gemischte Zahlen zuerst in unechte Brüche um. Rechne niemals die ganze Zahl und den Bruch einzeln mal.

Beispiel 2: Gemischte Zahlen

Berechne $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$.

Umwandeln: $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3}$. Die 3 kürzt sich über Kreuz: $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{1} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Beispiel 3: Anteil vom Rest

Ein Kind liest am ersten Tag $\frac{1}{4}$ eines Buches und am zweiten Tag $\frac{2}{3}$ vom Rest. Wie viel hat es gelesen?

Rest nach Tag 1: $\frac{3}{4}$. Tag 2: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Insgesamt: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Beispiel 4: Klammer und Produkt

Berechne $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{2}{5}$.

Klammer: $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Produkt: $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Mit Kürzen über Kreuz geht es schneller.

Der Kehrbruch

Definition: Kehrbruch

Den **Kehrbruch** (Kehrwert) erhält man, indem man Zähler und Nenner vertauscht. Der Kehrbruch von $\frac{3}{5}$ ist $\frac{5}{3}$. Eine ganze Zahl schreibt man als Bruch mit Nenner 1: Der Kehrbruch von 4 ist $\frac{1}{4}$.

Merke

Ein Bruch mal sein Kehrbruch ergibt immer 1: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$. Die Zahl 0 hat keinen Kehrbruch.

Durch einen Bruch dividieren

Regel: Division

Durch einen Bruch teilen heißt, mit seinem Kehrbruch multiplizieren. Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Merke: Teilen durch ganze Zahl

Teilt man einen Bruch durch eine ganze Zahl, vergrößert man den Nenner: $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$. Teilt man eine ganze Zahl durch einen Bruch kleiner als 1, wird das Ergebnis größer: $6 : \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$.

So gehst du vor: Brüche dividieren

1. Lass den ersten Bruch unverändert.
2. Bilde den Kehrbruch des zweiten Bruchs (des Teilers).
3. Multipliziere und kürze, wenn möglich.

Beispiel 5: Gläser füllen

Wie viele Gläser mit $\frac{1}{4}$ Liter kannst du mit $2\frac{1}{2}$ Liter Saft füllen?

$2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \cdot 4 = \frac{20}{2} = 10$. Du kannst 10 Gläser füllen.

Beispiel 6: Wie oft passt es?

Wie oft passt ein Achtel in drei Viertel?

$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Drei Viertel sind sechs Achtel, das Achtel passt 6-mal hinein.

Hinweis

Faustregel für Sachaufgaben: Wird ein Teil von einer Größe gesucht, wird multipliziert („von“). Wird gefragt, wie oft etwas hineinpasst, wird dividiert. Punktrechnung geht vor Strichrechnung, Klammern zuerst. Multiplikation ist vertauschbar, Division nicht.

Bruchteile von Größen berechnen

So gehst du vor: Bruchteil einer Größe

1. Teile die Größe durch den Nenner: So erhältst du einen Teil.
2. Multipliziere das Ergebnis mit dem Zähler.
3. Gib die Einheit an. Du kannst auch gleich $\text{Zähler} \cdot \text{Größe} : \text{Nenner}$ rechnen.

Beispiel 7: Bruchteil von Geld

Berechne $\frac{3}{5}$ von 45 €.

$45 : 5 = 9$ € ist ein Fünftel. Drei Fünftel sind $3 \cdot 9 = 27$ €. Als Rechnung: $\frac{3}{5} \cdot 45 = \frac{3 \cdot 45}{5} = \frac{135}{5} = 27$ €.

Kürzen vor dem Multiplizieren

Regel: Über Kreuz kürzen

Beim Multiplizieren zweier Brüche darfst du schon vor dem Rechnen kürzen: Ein Zähler und ein Nenner (auch aus verschiedenen Brüchen) dürfen durch denselben Teiler geteilt werden. Dadurch bleiben die Zahlen klein, und das Ergebnis ist gleich schon vollständig gekürzt.

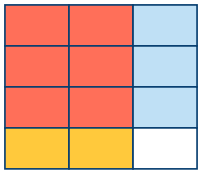
Beispiel 8: Kreuzkürzen

Berechne $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}$.

Kürze 8 und 12 durch 4: $\frac{2}{15} \cdot \frac{5}{3}$. Kürze 5 und 15 durch 5: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Ohne Kürzen: $\frac{40}{180} = \frac{2}{9}$, also dasselbe Ergebnis. Probe: \frac{2}{9}.

Das Flächenmodell

Mit einem Rechteck kannst du Brüche zeichnerisch multiplizieren. Das Rechteck steht für das Ganze. Teile es in 3 gleich breite Spalten und in 4 gleich hohe Zeilen. Zwei Spalten gehören zu $\frac{2}{3}$, drei Zeilen zu $\frac{3}{4}$. Der rote Bereich, in dem beide Färbungen zusammentreffen, zeigt $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$: 6 von 12 Feldern.



Also gilt $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Du multiplizierst Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

Dividieren heißt: Wie oft passt es hinein?

Beispiel 9: Natürliche Zahl durch Bruch

Berechne $3 : \frac{3}{4}$ und erkläre das Ergebnis.

Wie oft passt $\frac{3}{4}$ in 3? Mit dem Kehrbruch: $3 : \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Probe: $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Es passen vier Dreiviertel in drei Ganze.

Beispiel 10: Bruch durch Bruch

Berechne $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$.

Mit dem Kehrbruch von $\frac{2}{3}$, das ist $\frac{3}{2}$: $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Probe: $1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Regel: Wann wird das Ergebnis größer oder kleiner?

Multiplizierst du mit einem Bruch kleiner als 1, wird das Ergebnis kleiner: $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Dividierst du durch einen Bruch kleiner als 1, wird das Ergebnis größer: $8 : \frac{1}{2} = 16$. Mit dieser Überlegung machst du einen Überschlag und erkennst grobe Fehler sofort.

Beispiel 11: Überschlag

Ist $2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 10$ plausibel?

Ja. Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in 1? Viermal. In $2\frac{1}{2}$ passt es also $2 \cdot 4 + 2 = 10$ mal. Rechnung: $\frac{5}{2} \cdot 4 = 10$.

Beispiel 12: Pizzaverteilung

Von einer Pizza sind noch $\frac{3}{4}$ übrig. Jedes Kind bekommt $\frac{1}{8}$ der Pizza. Wie viele Kinder werden satt?

$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = 6$. Sechs Kinder bekommen je ein Stück.

Mehrere Schritte nacheinander

In Sachaufgaben folgen oft zwei Bruchteile aufeinander: Zuerst wird ein Teil des Ganzen genommen, dann ein Teil des Rests. Rechne dann Schritt für Schritt und schreibe nach jedem Schritt auf, was die Zahl bedeutet. Ein Skizzenstreifen hilft, den Überblick zu behalten. Am Ende kannst du mit einer einzigen Multiplikation von Brüchen kontrollieren.

Beispiel 13: Zwei Bruchteile nacheinander

Von einem Vorrat von 40 kg Äpfeln werden $\frac{3}{8}$ verkauft. Von dem Rest werden $\frac{2}{5}$ zu Saft verarbeitet. Wie viel Kilogramm Äpfel werden zu Saft?

Verkauft: $40 : 8 = 5$, also $3 \cdot 5 = 15$ kg. Rest: $40 - 15 = 25$ kg. Saft: $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ kg.

Kontrolle: Der Rest ist $\frac{5}{8}$ des Vorrats, und $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{4}$ von 40 kg, das sind 10 kg.

Achtung: Typische Fehler

Beim Multiplizieren brauchst du keinen gemeinsamen Nenner: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{6}$, nicht $\frac{3+2}{6}$. Beim Dividieren wird nur der zweite Bruch umgedreht, nicht der erste: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$. Gemischte Zahlen musst du zuerst in unechte Brüche verwandeln und darfst nicht Ganze und Brüche getrennt multiplizieren: $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$ ist $6\frac{1}{4}$, nicht $4\frac{1}{4}$. Das Ergebnis immer kürzen.

Wusstest du schon?

Das Wort „Bruch“ kommt vom Brechen: Ein Ganzes wird in Teile gebrochen. Im Lateinischen heißt der Bruch „fractio“, daher auch das englische „fraction“. Dass man durch einen Bruch dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert, wussten schon indische Mathematiker vor über 1 000 Jahren.

Beispiel: Ein Bruchteil vom Bruchteil

In einer Klasse spielen $\frac{2}{3}$ der Kinder ein Instrument. Von diesen spielt die Hälfte Gitarre. Welcher Bruchteil der Klasse spielt Gitarre?

Wir suchen „die Hälfte von zwei Dritteln“. Das Wort „von“ übersetzen wir in ein Malzeichen. Also rechnen wir $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$. Über Kreuz kürzen wir die 2 im Nenner mit der 2 im Zähler und erhalten $\frac{1}{3}$. Ein Drittel der Klasse spielt Gitarre. Bei 27 Kindern wären das 9 Kinder. Du kannst das auch an einem Rechteck zeichnen: Teile es senkrecht in Drittel, färbe zwei davon, und halbiere die gefärbte Fläche waagerecht. Der doppelt gefärbte Teil ist genau ein Drittel des Rechtecks.

Schon gewusst?

Schon die alten Ägypter rechneten vor über 3500 Jahren mit Brüchen. Sie benutzten fast nur Stammbrüche, also Brüche mit dem Zähler 1, und schrieben zum Beispiel $\frac{3}{4}$ als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Das Teilen durch einen Bruch mit Hilfe des Kehrbruchs wurde erst viel später in indischen und arabischen Rechenbüchern beschrieben und kam im Mittelalter nach Europa. Heute brauchst du diese Regeln beim Kochen, beim Handwerken und später in der Algebra, wenn statt Zahlen Buchstaben im Bruch stehen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Bruch mal natürliche Zahl: Nur der Zähler wird mit der Zahl multipliziert: $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$.
- Bruch mal Bruch: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner; vorher über Kreuz kürzen.

- „Von“ heißt „mal“: $\frac{3}{5}$ von 45 € sind $\frac{3}{5} \cdot 45 = 27$ €.
- Gemischte Zahlen zuerst in unechte Brüche verwandeln, dann multiplizieren; nie Ganze und Brüche getrennt multiplizieren.
- Der Kehrbruch von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$. Durch einen Bruch dividieren heißt mit dem Kehrbruch multiplizieren.
- Faktor kleiner als 1 verkleinert, Divisor kleiner als 1 vergrößert: nützlich für den Überschlag.
- Division als Frage: Wie oft passt der Bruch hinein? $3 : \frac{3}{4} = 4$.

Achtung

Beim Multiplizieren braucht man keinen gemeinsamen Nenner. Beim Dividieren wird nur der zweite Bruch (der Teiler) zum Kehrbruch. Bei gemischten Zahlen nicht einzeln rechnen: $2\frac{1}{2} \cdot 2$ ist nicht $4\frac{1}{4}$, sondern $\frac{5}{2} \cdot 2 = 5$. Kürze, bevor du mit großen Zahlen rechnest.

Ottos Tipp

Beim Multiplizieren schaust du zuerst, ob du über Kreuz kürzen kannst. Beim Dividieren sagst du: „Kehrbruch, mal!“ Mal ein Bruch kleiner als 1 macht kleiner, durch einen Bruch kleiner als 1 macht größer. Daran erkennst du, ob dein Ergebnis stimmen kann.