Lösungen - Multiplikation und Division von Brüchen

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

a) Bei „Bruch mal natürliche Zahl“ multiplizieren wir nur den Zähler: $\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$. Der Nenner bleibt 7, kürzen ist nicht möglich.
b) $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{20}{8}$. Wir kürzen mit 4: $\frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.
c) Die Reihenfolge der Faktoren spielt keine Rolle: $6 \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{9}$. Kürzen mit 3 ergibt $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.
d) $\frac{3}{10} \cdot 15 = \frac{45}{10}$. Kürzen mit 5 ergibt $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.
Antwort: Die Ergebnisse sind $\frac{6}{7}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$ und $4\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2

„Von“ bedeutet „mal“. Wir teilen zuerst das Ganze durch den Nenner und nehmen das Ergebnis dann mit dem Zähler mal.
a) Ein Viertel von 60 € ist $60 : 4 = 15$ €. Drei Viertel sind $3 \cdot 15 = 45$ €.
b) Ein Fünftel von 35 kg ist $35 : 5 = 7$ kg, zwei Fünftel sind $2 \cdot 7 = 14$ kg.
c) Zuerst in Minuten umrechnen: 2 h $= 120$ min. Ein Sechstel ist $120 : 6 = 20$ min, fünf Sechstel sind $5 \cdot 20 = 100$ min, also 1 h 40 min.
d) 3 km $= 3000$ m. Ein Zehntel ist 300 m, sieben Zehntel sind $7 \cdot 300 = 2100$ m.
Antwort: 45 €, 14 kg, 100 min und 2100 m.

Lösung zu Aufgabe 3

Regel: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. Vorher über Kreuz kürzen spart Arbeit.
a) Hier kann man nicht kürzen: $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.
b) 4 und 8 haben den Teiler 4, 3 und 9 den Teiler 3. Nach dem Kürzen bleibt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
c) 5 und 25 kürzen wir durch 5, 6 und 12 durch 6. Es bleibt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.
d) 14 und 28 kürzen wir durch 14, 9 und 15 durch 3. Es bleibt $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$.
Kontrolle zu d): $\frac{14 \cdot 9}{15 \cdot 28} = \frac{126}{420} = \frac{3}{10}$. Antwort: $\frac{8}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Gemischte Zahlen werden zuerst in unechte Brüche umgewandelt, zum Beispiel $1\frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$.
a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ (die 3 kann man auch über Kreuz kürzen).
b) $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.
c) $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ und $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$. $\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{60}{15} = 4$.
d) $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$.

Achtung: Man darf nicht Ganze mal Ganze rechnen, denn $2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ wäre falsch.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Den Kehrbruch erhält man, indem man Zähler und Nenner vertauscht.
$\frac{3}{5}$ hat den Kehrbruch $\frac{5}{3}$; Produkt $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$.
$\frac{7}{2}$ hat den Kehrbruch $\frac{2}{7}$; Produkt $\frac{14}{14} = 1$.
$4 = \frac{4}{1}$ hat den Kehrbruch $\frac{1}{4}$; Produkt $\frac{4}{4} = 1$.
$1\frac{1}{3}$ muss erst umgewandelt werden: $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, Kehrbruch $\frac{3}{4}$, Produkt $\frac{12}{12} = 1$.
b) Das Produkt aus einer Zahl und ihrem Kehrbruch ist immer genau 1. Der Grund: Im Zähler und im Nenner stehen dieselben Faktoren, nur in anderer Reihenfolge, also kürzt sich alles weg.

Lösung zu Aufgabe 6

Wer einen Bruch durch eine natürliche Zahl teilt, verteilt ihn auf noch mehr Teile. Deshalb wird der Nenner mit der Zahl multipliziert.
a) $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Kontrolle: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
b) $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. Hier könnte man auch den Zähler direkt teilen: $6 : 2 = 3$.
c) $\frac{5}{6} : 10 = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$.
d) Zuerst umwandeln: $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. Dann $\frac{9}{4} : 3 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
Antwort: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{12}$ und $\frac{3}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Merksatz: Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert.
a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$. Sinn: Ein halbes passt anderthalbmal in drei Viertel.
b) $\frac{5}{6} : \frac{5}{12} = \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{60}{30} = 2$. Über Kreuz kürzt man 5 mit 5 und 12 mit 6.
c) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$.
d) $4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Zwei Fünftel passen zehnmal in 4.
Antwort: $1\frac{1}{2}$, 2, $1\frac{1}{2}$, 10.

Lösung zu Aufgabe 8

Zuerst werden alle gemischten Zahlen in unechte Brüche umgewandelt, dann wird mit dem Kehrbruch multipliziert.
a) $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{10} = 2$.
b) $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. $\frac{15}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{120}{20} = 6$.
c) $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Durch 2 teilen heißt Nenner mal 2: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
d) $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. $5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3$.
Kontrolle zu d): $3 \cdot 1\frac{2}{3} = 3 + 2 = 5$. Die Ergebnisse lauten 2, 6, $\frac{2}{3}$ und 3.

Lösung zu Aufgabe 9

Es gelten die bekannten Regeln: Klammern zuerst, dann Punkt- vor Strichrechnung.
a) Zuerst das Produkt: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Dann addieren: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
b) Zuerst die Klammer auf den Hauptnenner 6 bringen: $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Danach dividieren: $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{6} = 2$.
c) Zuerst die Division: $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. Danach subtrahieren: $2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
Antwort: a) 1, b) 2, c) $1\frac{1}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 10

Für 6 statt 4 Personen braucht man das $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$-fache jeder Zutat.
a) Milch: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ l.
b) Mehl: $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$ kg, also knapp ein Kilogramm.
c) Butter: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Päckchen.
d) Zwei Rezepte enthalten $2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ kg Mehl. Wir fragen: Wie oft passt $\frac{1}{16}$ kg hinein? $\frac{5}{4} : \frac{1}{16} = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$.
Antwort: $1\frac{1}{8}$ l Milch, $\frac{15}{16}$ kg Mehl, $\frac{1}{2}$ Päckchen Butter; Lena backt 20 Portionen.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Wie oft passt $\frac{1}{8}$ in $\frac{3}{4}$? $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Es werden 6 Kinder satt.
b) Jetzt sind es $6 + 3 = 9$ Kinder. Sie brauchen $9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ Pizza. Vorhanden sind $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Es fehlen $\frac{9}{8} - \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$ Pizza.
c) $\frac{3}{4}$ wird auf 6 Kinder verteilt: $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Jedes Kind bekommt $\frac{1}{8}$ der Pizza.
d) $\frac{5}{6} : \frac{1}{12} = \frac{5}{6} \cdot 12 = \frac{60}{6} = 10$.
Antwort: 6 Kinder, es fehlen $\frac{3}{8}$ Pizza, jedes Kind erhält $\frac{1}{8}$, der zweite Karton ergibt 10 Stücke.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Fläche = Länge mal Breite: $\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}\,\mathrm{m}^2$.
b) Zwei Drittel davon: $\frac{2}{3} \cdot \frac{63}{8} = \frac{126}{24} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$ Salat.
c) Pro Quadratmeter $\frac{3}{4}$ kg Dünger: $\frac{3}{4} \cdot \frac{63}{8} = \frac{189}{32} = 5\frac{29}{32}$ kg, also knapp 6 kg.
d) Neue Fläche: $\frac{7}{2} \cdot 3 = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2$. Zum Vergleich: $\frac{84}{8} - \frac{63}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}\,\mathrm{m}^2$ mehr als vorher.
Antwort: Das Beet hat $7\frac{7}{8}\,\mathrm{m}^2$, davon $5\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$ Salat; man braucht $5\frac{29}{32}$ kg Dünger; das größere Beet hat $10\frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Wie oft passt $\frac{3}{4}$ m in 12 m? $12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16$. Sie erhält 16 Stücke.
b) $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$. $\frac{15}{2} : \frac{5}{8} = \frac{15}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{120}{10} = 12$. Es entstehen genau 12 Stücke, es bleibt

nichts übrig. Kontrolle: $12 \cdot \frac{5}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$ m.
c) 16 Stücke zu je 1,20 €: $16 \cdot 1{,}20 = 19{,}20$ €.
Antwort: 16 Stücke; 12 Stücke ohne Rest; alle Stücke kosten zusammen 19,20 €.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Das Fass ist zu zwei Dritteln gefüllt: $\frac{2}{3} \cdot 90 = 90 : 3 \cdot 2 = 60$ l.
b) Davon werden drei Fünftel benutzt: $\frac{3}{5} \cdot 60 = 60 : 5 \cdot 3 = 36$ l.
c) Im Fass bleiben $60 - 36 = 24$ l.
d) Bezogen auf das volle Fass sind das $\frac{24}{90}$. Kürzen mit 6 ergibt $\frac{4}{15}$. Kontrolle mit Brüchen: Es bleiben $\frac{2}{5}$ der Füllung, und $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.
Antwort: 60 l im Fass, 36 l zum Gießen, 24 l bleiben, das ist $\frac{4}{15}$ des vollen Fasses.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Vormittag: $\frac{2}{5} \cdot 15 = 15 : 5 \cdot 2 = 6$ km.
b) Danach bleiben $15 - 6 = 9$ km.
c) Am Nachmittag gehen sie ein Drittel des Rests: $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3$ km.
d) Insgesamt sind sie $6 + 3 = 9$ km gelaufen, es bleiben $15 - 9 = 6$ km. Als Bruchteil: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Kontrolle: Nach dem Vormittag bleiben $\frac{3}{5}$, davon bleiben nach dem Nachmittag $\frac{2}{3}$, und $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
Antwort: 6 km, 9 km, 3 km; für den nächsten Tag bleiben $\frac{2}{5}$ der Strecke.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Romane: $\frac{3}{8} \cdot 480 = 480 : 8 \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$ Bücher.
b) Sachbücher: $\frac{1}{4} \cdot 480 = 120$ Bücher.
c) Fantasy ist ein Bruchteil der Romane, also rechnen wir mit 180: $\frac{2}{5} \cdot 180 = 36 \cdot 2 = 72$ Bücher.
d) „Zwei Fünftel von drei Achteln“: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$. Kontrolle: $\frac{72}{480} = \frac{3}{20}$, denn beide Zahlen lassen sich durch 24 teilen.
Antwort: 180 Romane, 120 Sachbücher, 72 Fantasy-Bücher; das sind $\frac{3}{20}$ aller Bücher.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Wie oft passt $\frac{1}{5}$ l in 12 l? $12 : \frac{1}{5} = 12 \cdot 5 = 60$ Becher.
b) Ein Drittel ist kostenlos: $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ l. Verkauft werden $12 - 4 = 8$ l.
c) $8 : \frac{1}{5} = 40$ Becher werden verkauft. Einnahmen: $40 \cdot 0{,}80 = 32{,}00$ €.
d) Gewinn = Einnahmen minus Kosten: $32 - 18 = 14$ €.
Antwort: 60 Becher insgesamt, 4 l gratis und 8 l verkauft, 40 verkaufte Becher bringen 32 €, der Gewinn beträgt 14 €.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Erster Tag: $\frac{2}{5} \cdot 60 = 24$ km.
b) Es bleiben $60 - 24 = 36$ km. Am zweiten Tag fahren sie $\frac{3}{4} \cdot 36 = 27$ km.
c) Es fehlen noch $36 - 27 = 9$ km.
d) Bei 12 km pro Stunde brauchen sie für 24 km genau $24 : 12 = 2$ h. Mit einer Pause von $\frac{1}{4}$ h dauert der Tag $2\frac{1}{4}$ h, also 2 h 15 min.
Antwort: 24 km am ersten Tag, 27 km am zweiten Tag, 9 km fehlen; Fahrzeit 2 h, mit Pause $2\frac{1}{4}$ h.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$, und $\frac{15}{8}$ ist größer als $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$.
Richtig ist die Aussage nur, wenn beide Brüche kleiner als 1 sind, etwa $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
b) Die Aussage ist falsch. Teilt man durch einen Bruch kleiner als 1, wird das Ergebnis größer: $4 : \frac{1}{2} = 8$, denn ein Halbes passt achtmal in 4.
c) Die Aussage ist richtig. $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$ sind Kehrbrüche, ihr Produkt ist $\frac{12}{12} = 1$.
Fazit: Ob ein Ergebnis größer oder kleiner wird, hängt davon ab, ob der Bruch kleiner oder größer als 1 ist.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Wir rechnen rückwärts: Wenn $\frac{3}{4}$ der Zahl 18 sind, ist ein Viertel $18 : 3 = 6$ und die ganze Zahl $4 \cdot 6 = 24$. Probe: $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$.
b) Umkehraufgabe: $x = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$. Probe: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
c) Gesucht ist $10 : \frac{5}{6} = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12$. Probe: $\frac{5}{6} \cdot 12 = 10$.
d) Der Bruchteil ist $\frac{36}{48}$. Kürzen mit 12 ergibt $\frac{3}{4}$.
Antwort: 24, $\frac{3}{4}$, 12 und $\frac{3}{4}$.