Lernzettel - Ganze Zahlen

Klasse: Klasse 6

Temperaturen unter null, Keller im Fahrstuhl, Minuspunkte im Spiel: Dafür brauchst du negative Zahlen. In diesem Kapitel lernst du, mit ganzen Zahlen zu rechnen.

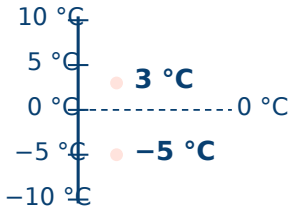
Einstieg: Unter null

Im Winter zeigt das Thermometer morgens -5 °C und mittags $+2$ °C. Im Hochhaus fährst du mit dem Aufzug vom Erdgeschoss in den Keller, das ist Stockwerk -1. Der Kontostand der Eltern steht nach der Miete im Minus. Das Tote Meer liegt 430 m unter dem Meeresspiegel, also bei -430 m. In all diesen Fällen reichen die natürlichen Zahlen nicht mehr aus, wir brauchen negative Zahlen. Zusammen mit 0 und den positiven Zahlen bilden sie die **ganzen Zahlen**. In diesem Kapitel lernst du, sie auf der Zahlengeraden zu ordnen, mit ihnen zu rechnen und sie im Koordinatensystem zu nutzen.

Negative Zahlen im Alltag

Definition: ganze Zahlen

Die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... zusammen mit den negativen Zahlen −1, −2, −3, ... heißen **ganze Zahlen**. Zahlen größer als 0 heißen positiv, Zahlen kleiner als 0 negativ. Die 0 ist weder positiv noch negativ.

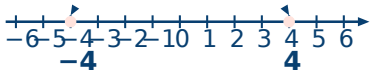


Beispiel 1: Thermometer

Was bedeutet −5 °C?

Fünf Grad unter dem Gefrierpunkt. Ähnlich gibt es Stockwerke unter dem Erdgeschoss (Keller 1, Keller 2) und Tiefen unter dem Meeresspiegel.

Zahlengerade, Gegenzahl und Betrag



Merke: Größer und kleiner

Auf der Zahlengerade liegt die 0 in der Mitte, rechts die positiven, links die negativen Zahlen. **Je weiter rechts eine Zahl steht, desto größer ist sie.** Deshalb ist -2 größer als -5, und jede negative Zahl ist kleiner als jede positive.

Definition: Gegenzahl

Die **Gegenzahl** liegt auf der anderen Seite der 0 im gleichen Abstand: Die Gegenzahl von 7 ist -7, die von -4 ist 4, die von 0 ist 0.

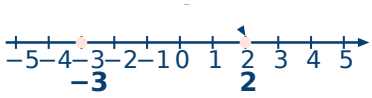
Definition: Betrag

Der **Betrag** einer Zahl ist ihr Abstand von 0. Er ist nie negativ: $|-8| = 8$ und $|5| = 5$. Zwei Zahlen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, haben denselben Betrag.

Addieren

Regel: Addieren

Eine positive Zahl addieren heißt auf der Zahlengerade nach rechts gehen, eine negative Zahl addieren heißt nach links gehen. **Gleiche Vorzeichen:** Beträge addieren, Vorzeichen behalten. **Verschiedene Vorzeichen:** den kleineren Betrag vom größeren abziehen, das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag behalten.



Beispiel 2: Addieren

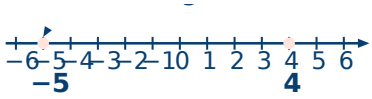
Berechne $(-3) + 5$**,** $(-7) + 4$**,** $(-6) + (-2)$ **und** $8 + (-8)$**.**

$(-3) + 5 = 2$, $(-7) + 4 = -3$, $(-6) + (-2) = -8$, $8 + (-8) = 0$.

Subtrahieren

Regel: Subtrahieren

Subtrahieren heißt, die Gegenzahl addieren: $a - b = a + (-b)$. Das Abziehen einer negativen Zahl ist dasselbe wie das Addieren der positiven: $2 - (-6) = 2 + 6 = 8$.



Beispiel 3: Temperaturunterschied

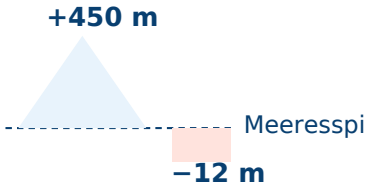
Die Temperatur steigt von −4 °C auf 6 °C. Wie groß ist der Unterschied?

$6 - (-4) = 6 + 4 = 10$ Kelvin (K).

Beispiel 4: Höhenunterschied

Ein Berggipfel liegt 450 m über dem Meeresspiegel, ein See liegt bei −12 m. Wie groß ist der Höhenunterschied?

$450 - (-12) = 450 + 12 = 462\,\text{m}$.



Multiplizieren und Dividieren

Regel: Vorzeichenregeln

Haben beide Zahlen das gleiche Vorzeichen, ist das Ergebnis positiv. Haben sie verschiedene Vorzeichen, ist es negativ. Die Beträge rechnet man wie gewohnt.

Vorzeichen	Ergebnis	Beispiel
plus mal plus	plus	$3 \cdot 4 = 12$
minus mal minus	plus	$(-3) \cdot (-4) = 12$
plus mal minus	minus	$3 \cdot (-4) = -12$
minus mal plus	minus	$(-3) \cdot 4 = -12$

So gehst du vor: Mit ganzen Zahlen rechnen

1. Bestimme zuerst das Vorzeichen des Ergebnisses nach den Regeln.
2. Rechne dann mit den Beträgen.
3. Bei Addition und Subtraktion hilft die Zahlengerade: Pfeil nach rechts für plus, nach links für minus.
4. Prüfe, ob das Ergebnis zur Situation passt.

Beispiel 5: Dividieren

Berechne $(-20) : 4$, $(-18) : (-3)$ und $24 : (-6)$.

$(-20) : 4 = -5$, $(-18) : (-3) = 6$, $24 : (-6) = -4$.

Hinweis

Warum ist „minus mal minus“ positiv? Es gilt $3 \cdot (-2) = -6$, $2 \cdot (-2) = -4$, $1 \cdot (-2) = -2$, $0 \cdot (-2) = 0$. Das Ergebnis wächst bei jedem Schritt um 2. Der nächste Schritt ist $(-1) \cdot (-2) = 2$.

Rechenreihenfolge und Anwendungen

Regel: Reihenfolge

Klammern zuerst, dann Punktrechnung (mal und geteilt), dann Strichrechnung (plus und minus). Beispiel: $(-2) \cdot (-3) + (-4) = 6 - 4 = 2$.

Beispiel 6: Temperaturverlauf

In einer Winternacht fällt die Temperatur von 3 °C um 8 K, am Mittag steigt sie um 9 K.

$3 - 8 = -5$: Nachts hat es −5 °C. Dann $-5 + 9 = 4$: Mittags sind es 4 °C.

Beispiel 7: Punktekonto

In vier Runden gibt es +15, −20, +8 und −12 Punkte. Wie steht das Konto?

Von links nach rechts: $15 - 20 = -5$, dann $-5 + 8 = 3$, dann $3 - 12 = -9$. Das Konto steht bei -9.

Ganze Zahlen vergleichen und ordnen

Regel: Größer und kleiner

Auf der Zahlengeraden ist von zwei Zahlen die größer, die weiter rechts liegt. Jede negative Zahl ist kleiner als 0 und kleiner als jede positive Zahl. Bei zwei negativen Zahlen ist die Zahl kleiner, deren Betrag größer ist: -10.

Beispiel 8: Zahlen ordnen

Ordne die Zahlen der Größe nach, beginne mit der kleinsten:
$-7,\ 3,\ -2,\ 0,\ -10$.

Die negativen Zahlen sind am kleinsten, davon -10 am meisten (Betrag 10). Dann

folgt -7, dann -2. Danach kommen 0 und 3. Ergebnis: -10.

Abstand zweier Zahlen

So gehst du vor: Abstand bestimmen

1. Bestimme, welche der beiden Zahlen weiter rechts liegt (die größere).
2. Subtrahiere die kleinere von der größeren.
3. Das Ergebnis ist der Abstand, er ist nie negativ.

Beispiel 9: Temperaturunterschied

Am Morgen waren es -8 °C, am Mittag 5 °C. Wie groß ist der Temperaturunterschied?

Größere Zahl: 5, kleinere Zahl: -8. $5-(-8)=5+8=13$. Der Unterschied beträgt 13 Kelvin (K). Auf der Zahlengeraden: von -8 bis 0 sind es 8 Schritte, von 0 bis 5 noch 5 Schritte.

Klammern auflösen

Regel: Plus- und Minusklammern

Steht vor einer Klammer ein Plus, kannst du sie einfach weglassen: $a+(-b)=a-b$. Steht vor der Klammer ein Minus, drehst du alle Vorzeichen in der Klammer um: $a-(-b)=a+b$ und $a-(b-c)=a-b+c$.

Beispiel 10: Subtrahieren einer negativen Zahl

Berechne $5-(-3)+(-4)$.

$5-(-3)=5+3=8$, dann $8+(-4)=8-4=4$. Zusammen: $5+3-4=4$.

Beispiel 11: Klammer mit Minus davor

Berechne $7-(3-8)$.

Variante 1: Klammer zuerst: $3-8=-5$, dann $7-(-5)=7+5=12$. Variante 2: Klammer auflösen: $7-3+8=12$. Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis 12.

Vorzeichen beim Multiplizieren

Faktoren	Ergebnis
plus mal plus	plus

Faktoren	Ergebnis
minus mal minus	plus
plus mal minus	minus
minus mal plus	minus

Regel: Mehrere Faktoren

Bei einem Produkt mit mehreren Faktoren zählst du die negativen Faktoren: Ist ihre Anzahl gerade, ist das Ergebnis positiv, ist sie ungerade, ist das Ergebnis negativ. Für die Division gelten dieselben Vorzeichenregeln.

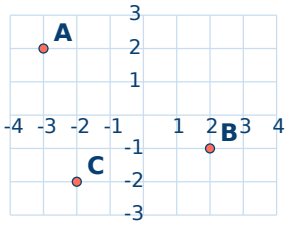
Beispiel 12: Drei negative Faktoren

Berechne $(-4) \cdot (-3) \cdot (-2)$.

Es gibt drei negative Faktoren, das ist eine ungerade Anzahl, also ist das Ergebnis negativ. Betrag: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ergebnis: $(-4) \cdot (-3) \cdot (-2) = -24$.

Das Koordinatensystem mit negativen Zahlen

Zwei senkrecht aufeinander stehende Zahlengeraden bilden ein Koordinatensystem. Die waagerechte Achse heißt **x-Achse**, die senkrechte **y-Achse**. Ihr Schnittpunkt ist der **Ursprung** $O(0|0)$. Die Achsen teilen die Ebene in vier Viertel, die **Quadranten** I bis IV, gegen den Uhrzeigersinn gezählt. Ein Punkt hat zwei Koordinaten: Zuerst kommt der x-Wert, dann der y-Wert.



Beispiel 13: Punkte ablesen

Gib die Koordinaten der Punkte A, B und C an und nenne den Quadranten.

A liegt 3 Einheiten links und 2 nach oben: $A(-3|2)$, Quadrant II. B liegt 2 rechts, 1 nach unten: $B(2|-1)$, Quadrant IV. C liegt 2 links, 2 nach unten: $C(-2|-2)$, Quadrant III.

Achtung: Typische Fehler

$-3 \cdot (-2)$ ist $+6$, nicht -6: Minus mal Minus ergibt Plus. Beim Addieren gilt: $-5 + 3$ ist -2, nicht -8 und nicht 2. Ordne negative Zahlen nicht nach dem Betrag: -8 ist kleiner als -3. Setze bei negativen Zahlen in Rechnungen immer Klammern, zum Beispiel $4 - (-3)$, nicht $4 - -3$. Und im Koordinatensystem kommt der x-Wert vor dem y-Wert:

$(3|-2)$ ist ein anderer Punkt als $(-2|3)$.

Wusstest du schon?

In China rechnete man schon vor über 2 000 Jahren mit roten Stäbchen für positive und schwarzen Stäbchen für negative Zahlen. Der indische Mathematiker Brahmagupta beschrieb um das Jahr 628 als erster die Regeln für Rechnungen mit Schulden und Vermögen. In Europa wurden negative Zahlen erst viel später akzeptiert.

Schon gewusst?

Negative Zahlen wurden lange abgelehnt. Chinesische Rechenmeister benutzten schon vor etwa 2000 Jahren rote Rechenstäbchen für Guthaben und schwarze für Schulden. In Europa nannte man negative Zahlen noch im 16. Jahrhundert „absurde Zahlen“. Erst als Kaufleute mit Schulden rechneten und Forscher Temperaturen unter dem Gefrierpunkt messen wollten, wurden sie selbstverständlich. Heute findest du sie auf jedem Thermometer, auf Kontoauszügen, bei Höhenangaben unter dem Meeresspiegel und im Aufzug, wenn du in die Tiefgarage fährst.

Häufiger Fehler

Viele denken, -8 sei größer als -5, weil 8 größer als 5 ist. Das stimmt nicht: Auf der Zahlengeraden liegt -8 weiter links, also ist -8 kleiner. Denke an das Thermometer: -8 °C ist kälter als -5 °C.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Zu den natürlichen Zahlen kommen die negativen Zahlen dazu; zusammen heißen sie ganze Zahlen $\mathbb{Z}$.
- Auf der Zahlengeraden ist die rechte Zahl die größere. Negative Zahlen sind kleiner als 0; bei zwei negativen Zahlen ist die mit dem größeren Betrag kleiner.
- Gegenzahlen haben denselben Betrag und verschiedene Vorzeichen: -5 und 5. Der Betrag ist der Abstand von 0.
- Addieren und Subtrahieren: Klammern auflösen, $a-(-b)=a+b$. Der Abstand zweier Zahlen ist größere minus kleinere Zahl.
- Multiplizieren und Dividieren: gleiche Vorzeichen ergeben plus, verschiedene Vorzeichen minus.
- Rechenreihenfolge: Klammern zuerst, dann Punkt vor Strich, sonst von links nach rechts.
- Im Koordinatensystem gibt es vier Quadranten; Koordinaten werden als $(x|y)$ angegeben, zuerst x, dann y.

Achtung

Minus mal minus ist plus, nicht minus. Beim Subtrahieren von negativen Zahlen das Vorzeichen beachten: $5 - (-3) = 8$, nicht 2. Der Betrag von -8 ist 8, die Gegenzahl von 8 ist -8. Beim Ordnen gilt: -9 ist kleiner als -2, auch wenn 9 größer ist als 2.

Ottos Tipp

Zeichne dir eine Zahlengerade und markiere die Rechenschritte als Pfeile: nach rechts plus, nach links minus. Bei Produkten und Quotienten zählst du die Minuszeichen: gerade Anzahl ergibt plus, ungerade Anzahl ergibt minus.